

# ENTENDIENDO LA LONGITUD: ERRORES EN EL USO DE LA REGLA

CRISTIAN ANDREY OSPINA FRANCO

ASTRID CAROLINA OVIEDO GUAVITA

UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS  
FACULTAD DE CIENCIA HUMANAS Y DE LA EDUCACIÓN  
ESCUELA DE BELLAS ARTES Y DE LA EDUCACIÓN  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA  
VILLAVICENCIO  
2019

ENTENDIENDO LA LONGITUD: ERRORES EN EL USO DE LA REGLA

CRISTIAN ANDREY OSPINA FRANCO

141002536

ASTRID CAROLINA OVIEDO GUAVITA


141002914

Informe final de trabajo de grado como requisito parcial para optar por el título de  
Licenciados en matemáticas y física

Directora

Ph.D. BEATRIZ AVELINA VILLARRAGA BAQUERO

UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS  
FACULTAD DE CIENCIA HUMANAS Y DE LA EDUCACIÓN  
ESCUELA DE BELLAS ARTES Y DE LA EDUCACIÓN  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA  
VILLAVICENCIO  
2019

	<b>UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS</b>	<b>CÓDIGO: FO-DOC-97</b>	
		<b>VERSIÓN:</b> 02	<b>PÁGINA:</b> 3 de 180
	<b>PROCESO DOCENCIA</b>	<b>FECHA:</b> 02/09/2016	
	<b>FORMATO AUTORIZACION DE DERECHOS</b>	<b>VIGENCIA:</b> 2016	

## FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS Y DE LA EDUCACIÓN

### AUTORIZACIÓN

Nosotros, Cristian Andrey Ospina Franco y Astrid Carolina Oviedo Guavita mayores de edad, vecinos de Villavicencio, identificados con la Cédula de Ciudadanía No. 1121857124 y No. 1121908285 de Villavicencio, actuando en nombre propio en mi calidad de autor del trabajo de tesis, monografía o trabajo de grado denominado **ENTENDIENDO LA LONGITUD: ERRORES EN EL USO DE LA REGLA**, hacemos entrega del ejemplar y de sus anexos de ser el caso, en formato digital o electrónico (CD-ROM) y autorizo a la **UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS**, para que en los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia, con la finalidad de que se utilice y use en todas sus formas, realice la reproducción, comunicación pública, edición y distribución, en formato impreso y digital, o formato conocido o por conocer de manera total y parcial de mi trabajo de grado o tesis.

**EL AUTOR – ESTUDIANTE**, Como autor, manifiesto que el trabajo de grado o tesis objeto de la presente autorización, es original y se realizó sin violar o usurpar derechos de autor de terceros; por tanto, la obra es de mi exclusiva autoría y poseo la titularidad sobre la misma; en caso de presentarse cualquier reclamación o acción por parte de un tercero en cuanto a los derechos de autor sobre la obra en cuestión, como autor, asumiré toda la responsabilidad, y saldré en defensa de los derechos aquí autorizados, para todos los efectos la Universidad actúa como un tercero de buena fe.

Para constancia, se firma el presente documento en dos (2) ejemplares del mismo valor y tenor en Villavicencio - Meta, a los 22 días del mes de mayo de dos mil diecinueve (2019).

EL AUTOR – ESTUDIANTE

\_\_\_\_\_  
CRISTIAN ANDREY OSPINA FRANCO  
C.C. No. 1.121.857.124 de Villavicencio

\_\_\_\_\_  
ASTRID CAROLINA OVIEDO GUAVITA  
C.C. No. 1.121.908.285 de Villavicencio

## **AUTORIDADES ACADÉMICAS**

**PABLO EMILIO CRUZ CASALLAS**

Rector (E)

**MARÍA LUISA PINZÓN ROCHA**

Vicerrector Académica

**DEIVER GIOVANNY QUINTERO REYES**

Secretario General

**LUZ HAYDEE GONZÁLEZ OCAMPO**

Decano (E) Facultad de Ciencias Humanas y de la Educación

**BEATRIZ AVELINA VILLARRAGA BAQUERO**

Directora Escuela de Pedagogía y Bellas Artes

**NASLY YANIRA MARTÍNEZ VELÁSQUEZ**

Directora Programa de Licenciatura en Matemáticas y Física

Nota de Aceptación

---

---

---

---

---

FREDY LEONARDO DUBEIBE MARÍN  
Director Centro de Investigación de la  
Facultad de Ciencias Humanas y de la Educación

---

NASLY YANIRA MARTÍNEZ VELÁSQUEZ  
Directora Programa de Licenciatura  
en Matemáticas y Física

---

BEATRIZ AVELINA VILLARRAGA BAQUERO  
Directora Proyecto

---

MARÍA TERESA CASTELLANOS SÁNCHEZ  
Jurado

---

FABIO ESPÓSITO GUEVARA  
Jurado

Villavicencio, 22 de mayo de 2019

## **DEDICATORIA**

Se cumple una meta y da paso a nuevos sueños, hoy agradezco a Dios por la vida y la bendición que me dio al regalarme a mis padres, a mi abuelita y toda mi familia que contribuyen a mis logros; A mis docentes, compañeros y colegas que estuvieron en este proceso y han aportado en mi formación personal y profesional; a Fernando que está a mi lado apoyándome y celebrando conmigo este triunfo... gracias a todos.

Astrid Carolina Oviedo Guavita

En este momento de mi vida mirar hacia atrás y ver cada paso que he dado y cada obstáculo vencido, me han formado como ser humano y estoy plenamente agradecido con Dios y la vida por regalarme esta oportunidad, un ciclo que terminó y millones de puertas que se abren para mí; gracias Dios, mi familia por ser mi apoyo incondicional, mi hijo el motor que me impulsa a ser y dar lo mejor de mí, a mi esposa quien ha vivido conmigo este camino. Mis maestros y compañeros por su colaboración y entrega. Siento infinita gratitud.

Cristian Andrey Ospina Franco

## TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN.....	13
1. MARCO REFERENCIAL .....	19
1.1. ERRORES.....	19
1.2. CONSTRUCCIÓN MATEMÁTICA DE LA MEDIDA DE LONGITUD .....	23
1.2.1. La medida de la longitud .....	23
1.2.2. Definición de conjunto por aditividad finita.....	24
1.2.3. Definición de álgebra booleana de conjuntos .....	25
1.2.4. Medidas con aditividad finita .....	27
1.3. MEDICIÓN.....	28
1.3.1. Génesis de la medida en el niño .....	32
1.3.2. Génesis de la magnitud longitud en el niño .....	34
1.3.3. Constitución de la unidad de medida.....	35
1.3.4. Conceptos asociados al acto de medir .....	37
1.4. LOS SISTEMAS DE MEDICIÓN Y LA REGLA DE MEDIR. ....	42
2. MATERIALES Y MÉTODOS.....	46
2.1. CATEGORÍAS DE ANÁLISIS .....	50
2.1.1. División y conservación de la unidad.....	51
2.1.2. Ausencia del cero.....	51
2.1.3. Iteración de la unidad, transitividad y aditividad.....	52
2.1.4. Relación entre número y medición .....	52
2.1.5. Longitud y distancia Relación entre número y medición .....	52
3. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS .....	54
3.1. ANÁLISIS ACTIVIDAD 1 (A1) .....	56
3.2. ANÁLISIS ACTIVIDAD 2 (A2) .....	61
3.3. ANÁLISIS ACTIVIDAD 3 (A3).....	66
3.4. ANÁLISIS ACTIVIDAD 4 (A4) .....	95
3.5. ANÁLISIS ACTIVIDAD 5 (A5) .....	100
3.6. ANÁLISIS ACTIVIDAD 6 (A6).....	110
3.7. ANÁLISIS ACTIVIDAD 7 (A7) .....	116
3.8. ANÁLISIS ACTIVIDAD 8 (A8) .....	130
3.9. ANÁLISIS COMPARATIVO DE LOS ESTUDIANTES.....	135
3.10. CARACTERIZACIÓN DE LOS ERRORES SISTEMÁTICOS EN QUE INCURREN LOS ESTUDIANTES OBJETO ESTUDIO DE CASO.....	144
4. CONCLUSIONES.....	149
5. RECOMENDACIONES.....	155
BIBLIOGRAFÍA.....	159
ANEXOS .....	165
RESUMEN ANALÍTICO ESPECIALIZADO (RAE) .....	177

## LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Resultados de la actividad de medida 1 .....	57
Tabla 2. Resultados actividad 2 .....	62
Tabla 3. Resultados actividad 3 regla 1 .....	70
Tabla 4. Resultados actividad 3 regla 2 .....	73
Tabla 5. Resultado actividad 3 regla 3 .....	76
Tabla 6. Resultados actividad 3 regla 4 .....	79
Tabla 7. Resultados actividad 3 regla 5 .....	82
Tabla 8. Resultados actividad 3 regla 6 .....	85
Tabla 9. Resultados actividad 3 regla 7 .....	88
Tabla 10. Resultados actividad 3 regla 8 .....	91
Tabla 11. Resultados actividad 4 .....	97
Tabla 12. Resultados actividad 5 situación 1 .....	102
Tabla 13. Resultados tabla 13 actividad 5 situación 2.....	105
Tabla 14. Resultado actividad 6 regla 1 y 2 .....	112
Tabla 15. Resultado actividad 7 regla rota .....	119
Tabla 16. Resultado actividad 7 regla rígida .....	123
Tabla 17. Resultado actividad 7 regla flexible .....	126
Tabla 18. Resultado actividad 8.....	131
Tabla 19. Resultados actividad 1 y 2 por estudiante .....	135
Tabla 20. Resultados actividad 3 por estudiante.....	137
Tabla 21. Resultados actividad 4,5 y 6 por estudiante .....	139
Tabla 22. Resultados actividad 7 y 8 por estudiante .....	141
Tabla 23. Errores por estudiante.....	145



## LISTA DE GRÁFICAS

Gráfica 1. resultados tabla 1 actividad 1 .....	59
Gráfica 2. resultados tabla 2 actividad 2 .....	64
Gráfica 3. resultados tabla 3 actividad 3 regla 1 .....	72
Gráfica 4. resultados tabla 4 actividad 3 regla 2 .....	75
Gráfica 5. resultado tabla 5 actividad 3 regla 3 .....	78
Gráfica 6. resultado tabla 6 actividad 3 regla 4 .....	81
Gráfica 7. resultado tabla 7 actividad 3 regla 5 .....	84
Gráfica 8. resultado tabla 8 actividad 3 regla 6 .....	87
Gráfica 9. resultado tabla 9 actividad 3 regla 7 .....	90
Gráfica 10. resultado tabla 10 actividad 3 regla 8 .....	93
Gráfica 11. resultado tabla 11 actividad 4 .....	99
Gráfica 12. resultados tabla 12 actividad 5 situación 1 .....	104
Gráfica 13. resultados actividad 5 situación 2 .....	107
Gráfica 14. resultado actividad 6 regla 1 y 2 .....	114
Gráfica 15. resultados tabla 15 actividad 7 regla rota .....	121
Gráfica 16. resultados tabla 16 actividad 7 regla rígida.....	125
Gráfica 17. resultados tabla 17 actividad 7 regla flexible .....	128
Gráfica 18. resultado tabla 18 actividad 8 .....	133

## LISTA DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1. Respuestas estudiantes E1, E7 y E20 actividad 1 .....	60
Ilustración 2. Respuestas estudiantes E1, E2, E9 y E33 actividad 2 .....	66
Ilustración 3. Respuestas estudiantes E2, E23, y E28 actividad 3 regla 1 .....	73
Ilustración 4. Respuestas estudiantes E20, E23, y E32 actividad 3 regla 2 .....	76
Ilustración 5. Respuestas estudiantes E4, E18, y E28 actividad 3 regla 3 .....	79
Ilustración 6. Respuestas estudiantes E1, E5, E25 y E28 actividad 3 regla 4 .....	82
Ilustración 7. Respuestas estudiantes E5, E12, y E15 actividad 3 regla 5 .....	85
Ilustración 8. Respuestas estudiantes E15 y E30 actividad 3 regla 6 .....	88
Ilustración 9. Respuestas estudiantes E14 y E18 actividad 3 regla 7 .....	91
Ilustración 10. Respuestas estudiantes E18, E24 y E28 actividad 3 regla 8 .....	95
Ilustración 11. Respuestas estudiantes E4, E6 y E7 actividad 4 .....	100
Ilustración 12. Respuestas estudiantes E22 y E28 actividad 5 situación 1 .....	105
Ilustración 13. Respuesta estudiante E26 actividad 5 situación 1 y 2 .....	105
Ilustración 14. Respuesta estudiante E1 actividad 5 situación 2 .....	108
Ilustración 15. Respuesta estudiante E2 actividad 5 situación 2 .....	108
Ilustración 16. Respuesta estudiante E3 actividad 5 situación 2 .....	109
Ilustración 17. Respuesta estudiante E6 actividad 5 situación 2 .....	109
Ilustración 18. Respuesta estudiante E18 actividad 5 situación 2 .....	110
Ilustración 19. Respuestas estudiantes E1, E2 y E4 actividad 6 .....	115
Ilustración 20. Respuestas estudiantes E5 y E9 actividad 6 .....	116
Ilustración 21. Respuestas estudiantes E22 y E28 actividad 6 .....	116
Ilustración 22. Respuestas estudiantes E1, E3 y E10 actividad 7 regla rota .....	122
Ilustración 23. Procedimientos respuestas estudiante E16 actividad 7 regla rota	122
Ilustración 24. Respuesta estudiante E6 actividad 7 figura 3 regla rota .....	123
Ilustración 25. Respuestas estudiantes E1, E3, E10, E24 y E28 actividad 7 regla rígida .....	126
Ilustración 26. Respuestas estudiantes E3, E24 y E28 actividad 7 flexible .....	129
Ilustración 27. Respuesta estudiante E24 actividad 7 figura 3 regla flexible .....	129

Ilustración 28. Respuestas estudiantes E9, E13 y E20 actividad 8 lápiz 1 .....	134
Ilustración 29. Respuesta estudiante E5 actividad 8 lápiz 2 .....	135

## LISTA DE ANEXOS

Anexo A. TAREA FASE 1 .....	165
Anexo B. ACTIVIDAD 1 .....	166
Anexo C. ACTIVIDAD 2 .....	167
Anexo D. ACTIVIDAD 3 .....	168
Anexo E. ACTIVIDAD 4 .....	171
Anexo F. ACTIVIDAD 5 .....	172
Anexo G. ACTIVIDAD 6 .....	173
Anexo H. ACTIVIDAD 7 .....	174
Anexo I. ACTIVIDAD 8 .....	176

## INTRODUCCIÓN

Siempre que se habla de matemáticas se relaciona muy seguido con problemas, números y operaciones, y por supuesto lo difíciles que son aprenderlas para la mayoría de las personas, en muchas ocasiones debido a la falta de seguimiento en los contenidos, la poca ejercitación y las escasas estrategias, entre otros.

En el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas se presentan problemáticas en todos los niveles educativos; Alagia<sup>1</sup>, menciona que el problema fundamental en la educación matemática está relacionado con la dificultad que tienen las personas en comprenderla, es decir, que no depende necesariamente de los contenidos, sino que el mismo uso del lenguaje, los algoritmos y las aplicaciones de los conceptos matemáticos generan grandes dificultades en su enseñanza-aprendizaje.

En Colombia, en el contexto escolar de la educación primaria, básica secundaria y media; el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas presenta dificultades que afectan la educación terciaria; estas dificultades son justificadas con los resultados obtenidos por los estudiantes en las pruebas PISA<sup>2</sup>. Los problemas en la educación matemática en Colombia según Murcia y Henao<sup>3</sup>, son de naturaleza epistemológica, tanto en la parte disciplinar de la ciencia, como en el

---

<sup>1</sup>ALAGIA, HUMBERTO. Problemas en Educación Matemática. *Noticiero de la Unión Matemática*, 2002.

<sup>2</sup>JAIME, Luis Heliodoro. La evaluación en la educación superior. *Principia Iuris*, 2014, vol. 11, no 11.

<sup>33</sup>MURCIA, M. E.; HENAO, J. C. Educación matemática en Colombia, una perspectiva evolucionaria. *Entre Ciencia e Ingeniería*, 2015, vol. 9, no 18, p. 23-30.

componente pedagógico; los docentes fueron educados con sistemas educativos antiguos y no han podido acoplar los nuevos modelos en la educación, a pesar de tener amplias y profundas investigaciones en el campo de la educación matemática; es así, que muchos docentes aún tienen la concepción que los errores cometidos por los estudiantes deben ser castigados y desarraigados de la escuela, sin ver el gran potencial y conocimiento que puede adquirir de estas equivocaciones, ya sean de origen epistemológico, ontogenético, cultural o didáctico.

Rico<sup>4</sup>, establece que el error es una posibilidad permanente en la apropiación y adquisición de los conocimientos que pueden llegar a formar parte del conocimiento científico de personas o grupos, pero que hoy en día podemos probar o demostrar que fueron errores designados en nuestros pasados, adoptándolos debido a que múltiples personas (científicos y no científicos) lo asumieron como verdadero. Los estudiantes pueden plantear una solución a un problema matemático de forma errónea y se les proporciona una solución con la cuestión planteada a su error. Los errores forman parte de las producciones de los alumnos durante su aprendizaje de las matemáticas.

Brousseau<sup>5</sup>, formula una teoría para el estudio de los errores a partir de la cual es posible tipificarlos en: erráticos y sistemáticos; los primeros se presentan con mayor frecuencia y poseen categoría de tipo diferente a un *perfil-tipo*, los últimos se

---

<sup>4</sup>RICO, Luis. Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. 1995.

<sup>5</sup>BROUSSEAU, Guy. Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1999, vol. 4, no 2, p. 165-198.

cometen con alta frecuencia en relación con las ocasiones que se dan. Este trabajo se centra en la definición de error propuesta por Brousseau y en aquellos de tipo sistemático.

En la escuela primaria es usual encontrar diferentes errores no sólo en cálculo sino también en procesos de medida, estos últimos se encuentran desde muy temprana edad en estudiantes de los primeros grados, investigaciones como la de Chamorro<sup>6</sup>, hace referencia a la dificultad que se presenta cuando se mide una longitud, ya que el acto de medir implica el aislamiento de la longitud del objeto de otras cualidades, asimilar la longitud real con un objeto como un segmento de recta, reconocer el cero como origen de la graduación del instrumento de medida y hacer corresponder éste con el objeto a medir.

Al usar la regla para la medición se presentan una serie de problemas, comenzando por el poco tiempo que se le destina en los currículos escolares a trabajar el tema de la medición y los instrumentos de medida, además de la importancia que se le da, ya que se tendrán temas con mayor relevancia por enseñar y, por último, el rol que asumen los docentes. Los profesores dan el contenido y lo evalúan, dando por entendido que todos los estudiantes saben usar la regla, sin detenerse a observar qué dificultades o errores se cometen en su procedimiento.

Como parte esencial del desarrollo espacial, se encuentra el dominio de los conceptos asociados a la medida y en especial la longitud, esta magnitud es posible

---

<sup>6</sup> CHAMORRO PLAZA, María del Carmen. Aproximación a la medida de magnitudes en la Enseñanza Primaria. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 1995, vol. 2, no 3, p. 31-53.

de medirse a través de un objeto intercurrente, en especial el más usado es la regla. Por lo tanto, el objetivo principal en esta investigación es: *Analizar los errores de tipo sistemáticos que cometen los estudiantes de grado quinto de primaria de la Institución Educativa Colegio Alberto Lleras Camargo sede Cataluña cuando usan la regla como instrumento de medida de la longitud.*

En la mayoría de los casos medir en la escuela se establece como una actividad física, asesorar el concepto o la comprensión mental que acompañan tal movimiento físico no es tan claro para los profesores, como asistir en el desarrollo de tal habilidad. En consecuencia, la meta de la enseñanza es instruir a los estudiantes cómo medir haciendo uso de un instrumento, por ejemplo, con una regla convencional. La mayor parte de los investigadores consideran que las marcas de una regla y los procedimientos de medida pueden ocultar la actividad conceptual que subyace a la herramienta y a la actividad física.

Otras investigaciones como las de Zorrilla<sup>7</sup> y Chamorro<sup>8</sup> muestran la existencia de otros errores generados por el instrumento regla cuando se cambian ciertas condiciones en él, por ejemplo, el comenzar en puntos diferentes al cero ya sea porque la regla está rota o porque existe un espacio adicional entre el inicio de la regla y el cero. De igual forma Drake, establece que “algunos estudiantes aún

---

<sup>7</sup>ZORRILLA, Antonio Frías; CUADRA, Francisco Gil; CARRETERO, María Francisca Moreno. Introducción a las magnitudes y la medida: longitud, masa, amplitud, tiempo. En Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria. Síntesis, 2001. p. 477-502.

<sup>8</sup>CHAMORRO Op. cit., p. 31-53.



tienen problemas para entender la medición lineal y todo lo que el espacio extra ha logrado es introducir un nuevo error”<sup>9</sup>.

Si bien el error puede tener causas diferentes tiende a ser considerado como si existiese algún esquema cognitivo inadecuado en el alumno y no solamente como consecuencia de una falta específica de conocimiento; los errores no aparecen por azar, sino que surgen en un marco conceptual consistente, y se basan sobre conocimientos adquiridos previamente. No debe pasarse por alto que todo proceso de enseñanza es potencialmente generador de errores debido a diferentes causas, algunas de las cuales se presentan inevitablemente; lo anterior está reflejado en los resultados de las Investigaciones desarrolladas por Sisman y Aksu<sup>10</sup>, Alagia<sup>11</sup>, Zorrilla<sup>12</sup>, Chamorro<sup>13</sup>, Pochulu<sup>14</sup>, Brousseau (citado por Artigue<sup>15</sup>) y otros actuales sobre errores.

En adición el estudio de los errores en estudiantes, su tipología y clasificación, forman parte del conocimiento profesional del profesor de matemáticas a cuyo

---

<sup>9</sup>DRAKE, Michael, et al. learning to measure length: The problem with the school ruler. *Australian primary mathematics classroom*, 2014, vol. 19, no 3, p. 27.

<sup>10</sup>SISMAN, Gulcin Tan; AKSU, Meral. A study on sixth grade students' misconceptions and errors in spatial measurement: Length, area, and volume. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 2016, vol. 14, no 7, p. 1293-1319.

<sup>11</sup> ALAGIA, HUMBERTO. Problemas en Educación Matemática. *Noticiero de la Unión Matemática*, 2002.

<sup>12</sup> ZORRILLA, Antonio Frías; CUADRA, Francisco Gil; CARRETERO, María Francisca Moreno. Introducción a las magnitudes y la medida: longitud, masa, amplitud, tiempo. En *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria*. Síntesis, 2001. p. 477-502

<sup>13</sup> CHAMORRO PLAZA, María del Carmen. Aproximación a la medida de magnitudes en la Enseñanza Primaria. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 1995, vol. 2, no 3, p. 31-53.

<sup>14</sup> POCHULU, Marcel. Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad. *Colección Digital Eudoxus*, 2009, no 8.

<sup>15</sup> ARTIGUE, Michèle, et al. La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. *Ingeniería didáctica en educación matemática*, 1995, vol. 1, p. 97-140.

estudio hay que dedicar tiempo y esfuerzo, pues este es una competencia profesional imprescindible para el educador matemático en el ejercicio de su profesión, como lo indican las investigaciones de González, Gómez, y Restrepo<sup>16</sup>, Drake<sup>17</sup>, Christie<sup>18</sup> y Rico<sup>19</sup>.

Por lo tanto, en esta investigación se analizan los errores de tipo sistemático que cometen los estudiantes de grado quinto de primaria de la Institución Educativa Alberto Lleras Camargo cuando usan la regla como instrumento de medida de la longitud, donde la regla posee diferentes condiciones: regla rígida, rota, maleable y reglas mal dibujadas.

Este informe consta de introducción, marco referencial, materiales y métodos, análisis de resultados, conclusiones, recomendaciones y nueve anexos. En el primer capítulo se explicitan los fundamentos teóricos. En el segundo, se expone la metodología de la investigación junto con las fases. En el tercer capítulo, se presentan los resultados y análisis de resultado. En el cuarto capítulo se argumentan las conclusiones.

---

<sup>16</sup> GONZÁLEZ, María José; GÓMEZ, Pedro; RESTREPO, Ángela M. Usos del error en la enseñanza de las matemáticas. *Revista de Educación*, 2015, vol. 370, p. 71-95.

<sup>17</sup> DRAKE, Michael, et al. learning to measure length: The problem with the school ruler. *Australian primary mathematics classroom*, 2014, vol. 19, no 3, p. 27.

<sup>18</sup> CHRISTIE, Gary. Helping Children Understand Measurement Using a Ruler. *Ohio Journal of School Mathematics* | Number 65 Spring, 2012.

<sup>19</sup> RICO, Luis. Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. 1995.

## 1. MARCO REFERENCIAL

El marco teórico que sustenta este informe hace énfasis en los siguientes descriptores: Error a partir de los aportes de Brousseau y la construcción matemática de la medida de la longitud.

### 1.1. ERRORES

El estudio y el análisis de los errores que cometen los estudiantes cuando desarrollan una actividad matemática se han convertido en línea de investigación en el campo de la educación matemática Engler<sup>20</sup>.

Rico<sup>21</sup>, propone cuatro líneas de investigación en torno de los errores:

- Primera: estudios sobre análisis, causas, elementos y taxonomías de clasificación.
- Segunda: trabajos acerca del tratamiento curricular.
- Tercera: estudios relativos a la formación de los docentes en cuanto a la capacidad para analizarlos, interpretarlos y tratarlos.
- Cuarta: trabajos de carácter técnico, que incluyen técnicas estadísticas y como contrastar hipótesis para el análisis de los errores.

Este trabajo de investigación toma como base la primera de estas líneas, debido a que permite desarrollar un estudio cualitativo interpretativo de los errores que

---

<sup>20</sup> ENGLER, Adriana, et al. Los errores en el aprendizaje de matemática. Revista Premisa, 2004, vol. 6, no 23, p. 23-32.

<sup>21</sup> RICO, Luis. Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. 1995.

cometen los estudiantes de grado quinto al momento de usar la regla como instrumento de medida.

Rico<sup>22</sup> mediante las reflexiones hechas por Popper, Bachelar y Lakatos establece algunos puntos de referencia para el estudio de los errores como son:

- Los errores contribuyen positivamente en los procesos de aprendizaje
- Los errores no aparecen por azar, sino que surgen de conocimientos adquiridos previamente
- Transformar la tendencia a pensar que los estudiantes son los culpables de los errores.
- Conseguir que tanto profesores como estudiantes tomen conciencia de la naturaleza y legitimidad del error, que permitan depurarlo de inconsistencias y convertirlas en herramientas eficaces se trata de una aproximación no penal ni punitiva, sino pragmática y positiva.
- Todo proceso de construcción de conocimiento es potencialmente generador de errores.

A partir de las anteriores reflexiones tomamos como referente la definición de error de Brousseau:

---

<sup>22</sup> Ibid., p. 6.

*El error no es solamente efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, según se creía en las teorías empiristas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tuvo su interés, su éxito, y que ahora se revela falso o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo no son fortuitos e imprevisibles se constituyen en obstáculos<sup>23</sup>.*

Brousseau afirma que los errores no son forzosamente explicitables; ya que no desaparecen radicalmente, sino que resisten, persisten, luego resurgen, y se manifiestan mucho tiempo después que el sujeto ha rechazado de su sistema cognoscitivo consciente el modelo defectuoso. Los errores se clasifican en erráticos, que se presentan con mayor frecuencia y de tipo diferente a un perfil-tipo, y sistemáticos, que se dan cuando se cometen con alta frecuencia en relación con las ocasiones que existen de tenerlos. Este trabajo se centrará en los errores de origen sistemático sin tener en cuenta aquellos de tipo errático.

Zorrilla<sup>24</sup>, determina diferentes errores en el uso de instrumentos de medida de longitud:

---

<sup>23</sup> BROUSSEAU, Guy; BALACHEFF, Nicolas. *Théorie des situations didactiques: Didactique des mathématiques 1990*. Grenoble: La pensée sauvage, 1998.

<sup>24</sup> ZORRILLA, Antonio Frías; CUADRA, Francisco Gil; CARRETERO, María Francisca Moreno. Introducción a las magnitudes y la medida: longitud, masa, amplitud, tiempo. En *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria*. Síntesis, 2001. p. 477-502.

- El alineamiento del extremo del segmento que se ha de medir con el extremo de la regla y no con el cero de esta. Cuando el cero no está en el extremo, puede inducir a errores en las medidas.
- Al medir un segmento, contar el número de marcas correspondientes como cantidad de unidades del segmento a medir. El resultado es, entonces, una unidad mayor que la medida real.
- Al medir, a partir de un determinado punto (valor de la escala) de la regla la longitud de un segmento, no restarle al extremo el punto origen.
- Creer que es imposible medir una línea curva. Ello supone que no es común que para medir líneas curvas se necesita algún tipo de elemento (como una cuerda) que la recubra y permita rectificarla para, posteriormente, trasladar su longitud sobre una regla, a cambio de superponer ésta sobre la línea curva para rectificar y medir la distancia entre los extremos.

Sisman y Aksu<sup>25</sup>, establecen los siguientes errores comunes y los conceptos erróneos en las tareas conceptualmente orientadas:

- A partir de 1 en lugar de 0.
- La regla debería ser más larga que el objeto que se mide.
- Una regla siempre debe ser más larga que el objeto que se está midiendo.

---

<sup>25</sup> SISMAN, Gulcin Tan; AKSU, Meral. A study on sixth grade students' misconceptions and errors in spatial measurement: Length, area, and volume. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 2016, vol. 14, no 7, p. 1293-1319.

- Comprensión inadecuada de la iteración, la aditividad y la estructura de una regla.
- El cm no es una unidad adecuada para medir en metros, una regla de centímetros solo mide los objetos en centímetros.
- La regla está rota y pierde su función. Si una regla se rompe, lo que queda es inútil. No es una comprensión adecuada de la iteración, la aditividad, la estructura de una regla o el punto cero.
- Inadecuada comprensión de la relación entre el tamaño, la aditividad y la iteración.
- Si una regla comienza con un número distinto de cero, no se puede usar para medir.
- La regla no está comenzando desde 0 (cero), una regla siempre debe comenzar con cero (cero siempre debe escribirse en la regla). Inadecuada comprensión de punto cero, iteración.

## 1.2. CONSTRUCCIÓN MATEMÁTICA DE LA MEDIDA DE LONGITUD

A continuación, se presenta la construcción de la medida y específicamente la medida de la longitud.

### 1.2.1. La medida de la longitud

La medida de la longitud de una curva son números que miden la magnitud o contenido de un conjunto. Todas estas medidas tienen ciertas propiedades

comunes; establecidas de forma abstracta conducen a un concepto general llamado *función de conjunto con aditividad finita*.

#### 1.2.1.1. *Propiedades de estas funciones:*

Una función  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ , cuyo dominio es una colección  $A$  de conjuntos y cuyos valores son números reales ( $\mathbb{R}$ ), se llama *función de conjunto*. Si  $A$  es un conjunto de la colección  $A$ , el valor de la función en  $A$  se representa por  $f(A)$ .

#### 1.2.2. **Definición de conjunto por aditividad finita**

Una función de conjunto  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ , se dice que es de aditividad finita si

$$f(A \cup B) = f(A) + f(B)$$

Siempre que  $A$  y  $B$  sean conjuntos disjuntos en  $A$  tales que  $A \cup B$  pertenezca también a  $A$ .

Los conjuntos de  $A$  son subconjuntos de un conjunto dado  $S$ , llamado *conjunto universal*. Es frecuente tener que efectuar las operaciones de reunión, intersección y complementación sobre los conjuntos de  $A$ . Para asegurarse de que  $A$  es cerrado respecto a esas operaciones diremos que  $A$  es un *álgebra booleana*, que se define así:



### 1.2.3. Definición de álgebra booleana de conjuntos

Una clase no vacía  $A$  de subconjuntos de un conjunto universal  $S$  se llama álgebra booleana si para todo par  $A$  y  $B$  de conjuntos de  $A$  tenemos

$$A \cup B \in A \text{ y } A' \in A$$

Aquí  $A' = S - A$ , es el complemento de  $A$  respecto a  $S$

Un álgebra booleana  $A$  también es cerrada para las intersecciones y diferencias, obtenemos:

$$A \cap B = (A' \cup B')' \text{ y } A - B = A \cap B'$$

Esto explica que el conjunto vacío  $\Phi$  pertenece a  $A$ , ya que  $\Phi = A - A$  para algún  $A$  de  $A$ . También el conjunto universal  $S$  pertenece a  $A$  puesto que  $S = \Phi'$ .

A partir de los subconjuntos de un conjunto universal dado  $S$  pueden construirse gran número de álgebras booleanas. La menor de esas álgebras es la clase  $A_0 = \{\Phi, S\}$  que consta tan sólo de dos subconjuntos especiales:  $\Phi$  y  $S$ . En el otro extremo está la clase  $A_1$ , que consta de todos los subconjuntos de  $S$ . Toda álgebra booleana  $A$  constituida con subconjuntos de  $S$  satisface las relaciones de inclusión  $A_0 \subseteq A \subseteq A_1$ .

La propiedad de la aditividad finita de funciones de conjunto de la ecuación

$$f(A \cup B) = f(A) + f(B)$$

Exige que  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  sean conjuntos disjuntos. De esta exigencia se desprende el siguiente teorema.

#### 1.2.3.1. Teorema

Si  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ , es una función de conjunto con aditividad finita, definida sobre un álgebra de Boole, entonces para todo par de conjuntos  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  de  $A$  tenemos

$$f(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = f(\mathbf{A}) + f(\mathbf{B} - \mathbf{A}), \text{ y}$$

$$f(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = f(\mathbf{A}) + f(\mathbf{B}) - f(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$$

*Demostración.*

Los conjuntos  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B} - \mathbf{A}$  son disjuntos y su reunión es  $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ .

Luego, aplicando  $f(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = f(\mathbf{A}) + f(\mathbf{B})$  a  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B} - \mathbf{A}$ ,

se obtiene  $f(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = f(\mathbf{A}) + f(\mathbf{B} - \mathbf{A})$ .

Para demostrar  $f(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = f(\mathbf{A}) + f(\mathbf{B}) - f(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$  obtenemos primero que  $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}'$  y  $\mathbf{B}$  son conjuntos disjuntos cuya reunión es  $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$ . Por lo tanto, tenemos

$$f(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = f(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}') + f(\mathbf{B}).$$

Así mismo  $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}'$  y  $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$  son conjuntos disjuntos cuya reunión es  $\mathbf{A}$  con lo cual se obtiene

$$f(\mathbf{A}) = f(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}') + f(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}).$$

y restando

$$f(A) = f(A \cap B') + f(A \cap B) - f(A \cup B)$$

$$= f(A \cap B') + f(B)$$

$$= f(A \cup B)$$

$$= f(A) + f(B) - f(A \cap B)$$

#### 1.2.4. Medidas con aditividad finita

Las funciones de conjunto que representan longitudes poseen la propiedad en que son todas las funciones de conjunto no negativas esto es:

$$f(A) \geq 0$$

Para cada conjunto  $A$  de la clase  $\mathcal{A}$  que se considera.

##### 1.2.4.1. Definición de medida con aditividad finita.

Una función de conjunto no negativa  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ , que es con aditividad finita se dice que es una medida con aditividad finita, o simplemente una medida.

Teniendo en cuenta el teorema anterior se obtienen las siguientes propiedades de la medida

- *Teorema:*

Sea  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ , una medida con aditividad finita definida sobre un álgebra booleana

A. Para todos los conjuntos  $A$  y  $B$  de  $A$  tenemos

a.  $f(A \cup B) \leq f(A) + f(B)$

b.  $f(B - A) = f(B) - f(A)$  si  $A \subseteq B$

c.  $f(A) \leq f(B)$  si  $A \subseteq B$  (propiedad de monotonía)

d.  $f(\Phi) = 0$

### 1.3. MEDICIÓN

La comprensión de la medición en los niños es posible de entenderla mediante tareas en las que un objeto está desalineado con respecto al punto "0". Los niños suelen tener dos tipos de errores; uno implica leer el número en la regla que se alinea con la parte más a la derecha del objeto, pero falla cuando el objeto está desalineado con el punto "0". El otro tipo de error implica contar las marcas en lugar de los intervalos o unidades que un objeto abarca; este tipo de error refleja un intento de centrarse en las unidades, pero una falta de comprensión sobre la importancia que tienen las unidades o los espacios.

La medición es esencialmente un proceso de comparación, de atribución de significado empírico entre dos unidades dimensionales: una constante conocida (unidad de medida) versus una variable desconocida (medida del objeto). Este proceso evoluciona a través del perfeccionamiento de las escalas (arreglos de unidades constantes), para referir un conjunto ordenado de valores a un conjunto ordenado de fenómenos u objetos. Más formalmente, se dice que medición es el

proceso mediante el cual se asigna un número a una propiedad física de algún objeto o conjunto de objetos con propósitos de comparación; mientras el término medida designa el número de unidades de una propiedad dada.

Conocer y hacer mediciones, es una competencia primordial en la vida real, debido a que la medición de los objetos en unidades apropiadas y el uso de herramientas de medición, ayudan a los estudiantes a comprender e interpretar la medida del espacio y en especial de la longitud; por lo tanto, el estudio de la medición tiene un lugar especial en cada plan de estudios en el área de las matemáticas. Sin embargo, en los estudios realizados sobre la comprensión de los estudiantes a la hora de la medición de la longitud, se evidencia dificultades puntuales que varían desde la postura y alineación incorrecta en el uso de la regla.

En la escuela, los planes de estudio y los profesores tienden a aislar dominios de medición particulares y formalizar los aspectos de medición dentro de cada dominio individual, por ejemplo, el uso de herramientas como la regla o el metro se dejan de lado, pero la conversión de unidades es prioritaria.

En las vivencias cotidianas, los niños pueden escuchar decir 'esa bolsa es pesada', 'tenemos que esperar un largo tiempo', 'es un largo camino', 'eres alto', 'ese zapato es demasiado pequeño', entre otras situaciones en las que también les asignamos una cantidad, por ejemplo, 'la velocidad es de 50 kilómetros por hora' o 'en 3 horas

llegamos', situaciones en las cuales según MacDonald “*en el currículo escolar, los maestros buscan construir y dar estructura a esas experiencias informales*”<sup>26</sup>.

Para Novoa, Caicedo y Puentes<sup>27</sup>, la magnitud-longitud, es una relación de matematización y modelación; donde “la matematización horizontal implica ir del mundo de la vida al mundo de los símbolos, mientras que la matematización vertical significa, el movimiento dentro del mundo de los símbolos”; es decir en la medida de la longitud se establecen relaciones entre símbolos, números como cualidades de objetos reales.

Chamorro y Belmonte<sup>28</sup>, establecen que la regla es un instrumento de medida que involucra la noción de la magnitud-longitud, donde disponen cuatro estadios a saber: la consideración y percepción de una magnitud como una propiedad que posee una colección de objetos; la conservación de la magnitud, donde el niño percibe que todo objeto así cambie su ubicación, forma o tamaño, su longitud permanece constante; la clasificación respecto a la magnitud dada y el establecimiento de una relación entre la magnitud y el número; situaciones que si se desarrollan en el niño estará en la capacidad de medir.

---

<sup>26</sup> MACDONALD, A. Young children's representations of their developing measurement understandings. *Mathematics: Traditions and [new] practices*, 2011, vol. 1, p. 420-490.

<sup>27</sup> NOVOA, Andrés Mauricio Martínez; CAICEDO, Juan Camilo Cobos; PUENTES, Elizabeth Torres. Matematización y modelización: experiencias y saberes. Una propuesta de aula. *Espiral, Revista de Docencia e Investigación*, 2015, vol. 5, no 2, p. 9-22.

<sup>28</sup> CHAMORRO, Carmen; BELMONTE, Juan M. *El problema de la medida: Didáctica de las magnitudes lineales*. 1991.

Para Stephan y Clements<sup>29</sup>, la longitud es una característica de los objetos, donde medir consiste en dos aspectos (a) Identificar la unidad de medida y subdividir el objeto (mental y físicamente) por esa unidad. (b) Ubicar esa unidad consecutivamente (iterando) justo a un lado del objeto que está siendo medido.

Existen dos criterios que evalúan finalmente la significación de una medida particular. Estos son: (a) validez, o sea que la unidad de medida (M) ha de variar en función del fenómeno (F).

$$M = f(F)$$

(b) Confiabilidad, o sea que el instrumento de medición (I) ha de variar en función de la unidad de medida.

$$I = f(M).$$

El primer criterio muestra de hecho el grado de conocimiento que se tiene de un fenómeno en un momento dado, mientras que el segundo plantea cuestiones de ingeniería. Se puede advertir que, al igual que en la operacionalización, con estos criterios es posible deshacerse de numerosas "medidas" que se emplean generosamente, en particular al abordar fenómenos humanos.

La teoría de la medida establece cuatro condiciones para que una asociación numérica se pueda definir como medida:

---

<sup>29</sup> STEPHAN, Michelle; CLEMENTS, Douglas H. Linear and area measurement in prekindergarten to grade 2. *Learning and teaching measurement*, 2003, p. 3-16.

- a) *Aditividad finita* (la medida del conjunto debe ser igual a la suma de las medidas de todas sus partes);
- b) *Conjunto vacío* (la medida de "nada" o "ninguno", debe ser 0);
- c) *Monotonía* (la medida de una parte de algo no debe ser mayor que la medida del todo); y
- d) *Replicabilidad* (si la medición se hace de cierto modo en determinadas condiciones físicas prescritas, entonces al repetirse una observación se deberán obtener resultados equivalentes).<sup>30</sup>

### 1.3.1. Génesis de la medida en el niño

La medición es un aspecto fundamental de las matemáticas, donde se relaciona el número a las dimensiones espaciales, es decir “crea puentes entre dos áreas principales de las matemáticas escolares (la geometría y el número)”<sup>31</sup>. Las habilidades de medición suelen desarrollarse cuando se comienza con la

---

<sup>30</sup> NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (ed.). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of, 2000.

<sup>31</sup> NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (ed.). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of, 2000. Citado por: NATIONAL RESEARCH COUNCIL, et al. Fundamentos cognitivos para la iniciación en el aprendizaje de las matemáticas. Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2014, vol. 3, no 1, p. 21-48.



comparación directa de objetos a lo largo de una dimensión. Por ello, los niños generalmente miden de forma correcta la longitud antes que el área y el volumen<sup>32</sup>.

El acto de medir magnitudes no es un acto espontáneo “la medida de magnitudes en el caso de la longitud es un acto que los niños no pueden realizar de una forma espontánea; por ello, es casi imposible la práctica de la medición hasta bien avanzada la enseñanza elemental, sin que se presenten numerosas dificultades”<sup>33</sup>. Es necesario que desde temprana edad se ponga en contacto al estudiante con situaciones que les permita la interacción con magnitudes físicas a partir de los sentidos o con la ayuda de medios auxiliares o instrumentos de medida.

En el conocimiento y medida de una magnitud se advierte que el niño pasa por unos estadios: Percepción y consideración de una magnitud, caracterizada por la elección de una propiedad de una colección de objetos, sin tener en cuenta otras propiedades que pueden presentar tales objetos; conservación de una magnitud, este estadio se considera superado cuando el alumno adquiere la idea que aunque el objeto cambie de posición, forma y tamaño, la magnitud se mantiene; ordenación respecto a una magnitud dada, cuando el niño es capaz de ordenar objetos teniendo en cuenta únicamente la magnitud considerada; y la última etapa se da

---

<sup>32</sup> NATIONAL RESEARCH COUNCIL, et al. Fundamentos cognitivos para la iniciación en el aprendizaje de las matemáticas. Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2014, vol. 3, no 1, p. 21-48.

<sup>33</sup> LOVELL, Kenneth. Desarrollo de los conceptos básicos matemáticos y científicos en los niños. Ediciones Morata, 1986.

en el momento en que el niño establece una relación entre la magnitud y el número, en este momento es capaz de medir.

### 1.3.2. Génesis de la magnitud longitud en el niño

La conservación de la longitud se da a partir de dos supuestos: movimientos, y conservación de la forma; en el primer estadio, la longitud sea de una recta, curva, o línea poligonal, no se mide, se tienen en cuenta sus extremos o distancia entre ellos, tampoco el niño tiene en cuenta el movimiento a lo largo de la línea, es decir, “le da igual desplazar el dedo a lo largo de la recta, que de una curva a efectos de evaluar la medida de su longitud”<sup>34</sup>. En el segundo estadio se da una ausencia de conservación, es en este caso que como afirma Chamorro “*sí se muestra al niño dos varillas y, a continuación, se desplaza ligeramente respecto a la otra, mantiene la idea de que son iguales, pero no lo mismo al desplazar una sobre la otra*”<sup>35</sup>. En este estadio se dan ciertas reacciones como son:

1. Fijación exclusiva de un punto terminal
2. Algunos se fijan en un extremo
3. Todo movimiento está ligado a un alargamiento, por lo tanto, se cree que la longitud ha aumentado.
4. Fijación solamente en un extremo, lo que les permite juzgar que es más corta una línea que otra.

---

<sup>34</sup> CHAMORRO, Carmen; BELMONTE, Juan M. *El problema de la medida: Didáctica de las magnitudes lineales*. 1991.

<sup>35</sup> Ibid., p. 18-19

Al final del segundo estadio. Si el objeto experimenta un movimiento se observan las siguientes reacciones.

1. Ante dos regletas iguales, una de las cuales esta desplazada un poco respecto a la otra, el niño varía su criterio acerca de la longitud de ellas.
2. Se origina una regulación intuitiva, que hace al sujeto fijarse en los dos extremos del objeto para determinar la longitud.
3. después de estimar intuitivamente que la longitud se conserva, el sujeto transporta, aunque sea mentalmente el objeto trasladado a su posición inicial.
4. Se llega a la conservación basados en la intuición y en la percepción, pero sin llegar a la necesidad lógica completa de que tal efecto se produzca.

### **1.3.3. Constitución de la unidad de medida.**

La idea de unidad de medida se construye a partir de cinco etapas<sup>36</sup>:

1. *Ausencia de unidad*, la primera medida es puramente visual y comparativa, es más fácil comparar dos objetos directamente entre sí que realizar esa misma comparación al introducir un tercer objeto, ello supone la no utilización de una unidad de medida.

---

<sup>36</sup> CHAMORRO, Carmen; BELMONTE, Juan M. *El problema de la medida: Didáctica de las magnitudes lineales*. p. 21-22 1991.

2. *Unidad Objetal.* es la unidad ligada a un sólo objeto siendo relacionado con lo que debe medirse, formando parte de la misma función que tiene el objeto que se ha de medir.
3. *Unidad situacional,* unidad que depende del objeto a medir, pero que cambia o puede cambiar de un objeto a otro, siempre que para cada uno se realice la medición y se conserve la relación, al menos en un orden de magnitud, entre las unidades de medida respectivas, esta relación tendrá que ver con la que existe entre los objetos a medir, dentro de una magnitud determinada.
4. *Unidad figural,* la unidad a construir se ve totalmente libre de toda relación con la cualidad a medir, incluso en el orden de magnitudes, permaneciendo, eso sí, una cierta tendencia a medir objetos grandes con unidades grandes, objetos pequeños con pequeñas unidades.
5. *Unidad propiamente dicha,* la unidad es libre del objeto a medir, tanto en forma como en tamaño, y es cuando se concibe una unidad propiamente inter-figural (la misma para todas las figuras u objetos), en esta etapa se obtiene como resultado que las nociones, medida y número se relacionan entre sí, al tratar de medir con una misma unidad objetos de diferente tamaño, se pasa así de una unidad en principio ligada totalmente al objeto a medir (intra-objeto), a una unidad que no depende en absoluto del objeto a medir (inter-objeto).

#### 1.3.4. Conceptos asociados al acto de medir

Existen conceptos importantes que sustentan la enseñanza de las medidas. Es importante comprender estos conceptos para poder utilizarlos en la comprensión de la forma de pensar del estudiante con respecto al espacio, mientras éste participa en la actividad física de medir. Estos conceptos son:

1. *Dividir.*
2. *Iteración de unidad.*
3. *Transición.*
4. *Conservación.*
5. *Acumulación de distancia.*
6. *Relación al número.*

*Dividir*, es la actividad mental de cortar la longitud de un objeto en unidades de igual tamaño. La idea de dividir una unidad en pedazos más pequeños no es trivial para los estudiantes y envuelve la concepción mental de que la longitud del objeto puede ser dividida o cortada antes incluso de medirlo físicamente. Lehrer<sup>37</sup> establece una tarea donde pide a los estudiantes que creen sus propias reglas para revelar como comprenden la división de la longitud. Algunos estudiantes, dibujan marcas a intervalos desiguales, lo cual indica que no dividen el espacio en unidades de igual tamaño. A medida que los estudiantes comprenden que las unidades son divisibles,

---

<sup>37</sup> LEHRER, Richard. Developing understanding of measurement. *A research companion to principles and standards for school mathematics*, 2003, p. 179-192.

ellos empiezan a comprender la idea de que la longitud es continua (por ejemplo, cualquier unidad en sí misma puede ser dividida).

*Iteración de unidad*, es la habilidad de pensar que el largo de un ladrillo es parte de la longitud del objeto que está siendo medido, al ubicar ladrillos repetidamente junto a la longitud del objeto mayor<sup>38</sup>. Lehrer encontró que inicialmente los estudiantes pueden iterar una unidad dejando espacios entre unidades subsecuentes o saltándose unidades adyacentes. Para estos estudiantes iterar es una actividad física de ubicar unidades de forma consecutiva, no una actividad para cubrir el espacio o longitud de otro objeto sin espacios. Lehrer continúa diciendo que cuando los estudiantes cuentan cada iteración de unidad, los profesores deben enfocarse en el significado que le ofrecen los niños al número. Adicionalmente, muchos estudiantes no ven inconvenientes al mezclar unidades (por ejemplo utilizar clips para papel y tapas de bolígrafo) o utilizar unidades de diferente tamaño (clips para papel grandes y pequeños) mientras puedan cubrir la longitud completa del objeto de alguna forma<sup>39</sup>; varias investigaciones reportan que los estudiantes empiezan a contar desde el numeral uno en una regla (por ejemplo, uno como el punto cero) o, cuando cuentan pasos de tacón apunta, inicia su conteo con el movimiento del primer pie<sup>40</sup>. Así, los numerales en una regla o la posición del pie significan cuando

---

<sup>38</sup> KAMII, Constance; CLARK, Faye B. Measurement of length: The need for a better approach to teaching. *School Science and Mathematics*, 1997, vol. 97, no 3, p. 116-121.

<sup>39</sup> CLEMENTS, Douglas H.; SARAMA, Julie; BATTISTA, Michael T. Development of concepts of geometric figures in a specially designed Logo computer environment. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 1998, vol. 20, p. 47-64.

<sup>40</sup> STEPHAN, Michelle; CLEMENTS, Douglas H. Linear and area measurement in prekindergarten to grade 2. *Learning and teaching measurement*, 2003, p. 3-16.

empezar a contar y no una cantidad espacio que fue cubierto. De esta forma, las marcas en una regla ocultan el concepto intencional sobre la medida. Otro problema relacionado a la iteración de unidades fue encontrado por Stephan<sup>41</sup>, según el cual muchos estudiantes inicialmente encuentran necesario iterar una unidad hasta que llene la longitud del objeto, y no extenderán la unidad más allá del punto final del objeto.

*Transitividad*, es la comprensión de: (a) Si el largo del objeto 1 es igual al largo del objeto 2 y el objeto 2 es igual de largo al objeto 3, entonces el objeto 1 es igual de largo al objeto 3; (b) Si el largo del objeto 1 es mayor que el largo del objeto 2 y el objeto 2 es más el largo que el objeto 3, entonces el objeto 1 es más largo que el objeto 3; (c) Si el largo del objeto 1 es menor que el largo del objeto 2 y el objeto 2 es más corto que el objeto 3, entonces el objeto 1 es más corto que el objeto 3.

Ser capaz de razonar transitivamente es crucial para medir y envuelve tomar un palo, y utilizarlo como instrumento para juzgar si dos torres inmóviles son del mismo tamaño. Un niño que puede razonar de esta forma puede tomar un tercer objeto o un objeto intercurrente (el palo) como un referente por el cual comparar las alturas y longitudes de otros objetos.

*Conservación de longitud*, se entiende que cuando un objeto se desplaza, su longitud no cambia. Para evaluar si los estudiantes a varias edades pueden mantener la longitud, un grupo de investigadores les mostró dos cintas de papel, la

---

<sup>41</sup> Ibid. p. 3-16.

mayoría que los estudiantes coincidieron que las dos tiras eran iguales en longitud; Sin embargo, cuando el entrevistador movió del fondo la cinta adelante unos centímetros, los estudiantes respondieron que las dos cintas no eran iguales<sup>42</sup>. En cuanto al uso de la regla, como herramienta de medida ante un estudiante que puede razonar transitivamente es muy útil<sup>43</sup>; sin embargo, para algunos investigadores la conservación es esencial para un completo entendimiento de la medición, algunos artículos advierten que los estudiantes necesariamente no necesitan desarrollar la transitividad y la conservación antes de que ellos puedan aprender algunas ideas de la medición. De hecho, Clements<sup>44</sup> argumenta que las únicos dos que hace parecer requerir conservación y transitividad son: (a) la inversa relación entre el tamaño de la unidad y el número de esas unidades y (b) la necesidad de usar unidades de igual longitud al medir. Aunque los investigadores no han conseguido estar de acuerdo sobre el orden en el que ciertas ideas de la medición son desarrolladas por los estudiantes, nosotros argumentamos que los niños deben desarrollar cada una de estas ideas para alcanzar un entendimiento completo de medición sin tener en cuenta el orden de desarrollo.

*Acumulación de distancias*, la medida como resultado de la iteración de unidades, significa para los estudiantes, la distancia desde el origen de la primera iteración al

---

<sup>42</sup> PIAGET, Jean; INHELDER, Barbel y SZEMINSKA, Alina. *The Child's Conception of Geometry: Translated from the French by EA Lunzer*. Basic Books, 1960.

<sup>43</sup> KAMII, Constance; CLARK, Faye B. Measurement of length: The need for a better approach to teaching. *School Science and Mathematics*, 1997, vol. 97, no 3, p. 116-121.

<sup>44</sup> CLEMENTS, Douglas H. Teaching length measurement: Research challenges. *School Science and Mathematics*, 1999, vol. 99, no 1, p. 5-11.



final de la última. Además, Piaget, Inhelder, y Szeminska<sup>45</sup>, describieron la actividad de medida de los estudiantes como una acumulación de distancia cuando el resultado de las formas de iteración establece relaciones para cada otro. Con Stephan y Clements<sup>46</sup>, los estudiantes miden las longitudes de los objetos por el paso del talón al dedo del pie y contando sus pasos. Al dar 8 pasos para algunos estudiantes el número 8 significa el espacio recorrido por el octavo pie, mientras que otros argumentan que 8 es el espacio recorrido desde el origen del primer pie al extremo del octavo. Estos últimos estudiantes estaban midiendo, acumulando distancias. Piaget, Inhelder, y Szeminska, afirman que una acumulación de interpretación de distancia indica que un estudiante ha construido un entendimiento completo de medida lineal.

*Relación entre número y medición*, medir está relacionado al número mientras que medición simplemente es un caso de conteo. Sin embargo, medir es conceptualmente más avanzado ya que los estudiantes deben reorganizar su entendimiento de los mismos objetos que ellos están contando (discreto contra las unidades continuas).

Muchos investigadores han determinado el papel que juega el contar en estudiantes para el desarrollo del concepto de medición. Inhelder, Sinclair, y Bovet<sup>47</sup> manifiestan que los estudiantes hacen juicios de medición basados en ideas de conteo. Por

---

<sup>45</sup> PIAGET, Jean; INHELDER, Barbel y SZEMINSKA, Alina. *The Child's Conception of Geometry: Translated from the French by EA Lunzer*. Basic Books, 1960.

<sup>46</sup> STEPHAN, Michelle; CLEMENTS, Douglas H. Linear and area measurement in prekindergarten to grade 2. *Learning and teaching measurement*, 2003, p. 3-16.

<sup>47</sup> INHELDER, Bàrbel; SINCLAIR, Hermine; BOVET, Magali. *Apprentissage et structures de la connaissance*. 1974.

ejemplo, al mostrar dos filas de fósforos de igual longitud, pero diferente cantidad; muchos niños opinaron que la fila con seis fósforos era más larga porque tenía más fósforos. Otros estudios también han encontrado que los niños utilizan sus experiencias de contar para interpretar su actividad de medición. Cualquiera que ha enseñado medición conoce que los estudiantes empiezan a menudo midiendo con el número "1" como punto de arranque en lugar de 0. La necesidad del punto cero no es 0, pero si los estudiantes entienden la medida sólo "leyendo la regla", ellos no entenderán esta idea.

#### 1.4. LOS SISTEMAS DE MEDICIÓN Y LA REGLA DE MEDIR.

La acción de medir con una regla implica tener en cuenta dos conceptos; el primero la inferencia lógica, llamada inferencia transitiva, en la cual. Si A es igual a B, y B es igual a C, por el principio de transitividad A es igual a C, pero si A es mayor que B, y B es mayor que C, entonces A debe ser mayor que C, lo que determinar una relación entre A y C, estas relaciones en el proceso de medición no se hacen directamente, sino a partir de las comparaciones como las siguientes si  $A > B$ , y  $B < C$ , en ambos casos, esta inferencia se hace a partir de la comparación entre A y C, mediante la relación con B.

De esta manera B actúa como una medida intercurrente y es fácil advertir que no se puede hacer uso de una regla si no se comprenden dichas inferencias, en otras palabras, medir con una regla es una acción lógica.

En segundo lugar, el concepto de unidad para la utilización de la regla nos permite ir más allá de una simple inferencia transitiva, la unidad permite atribuir un valor determinado a una magnitud, y con la ayuda de las unidades de medición podemos establecer relaciones como  $A > C$ , además de relaciones como es el caso “A es dos, o tres veces más larga que C”.

A partir de este concepto el uso de la regla de medir, puede pensarse como lo plantea Nunes<sup>48</sup>, “hay diferencia entre las reglas lógicas universales, y los inventos culturales hechos por el hombre”, es decir, a estos dos aspectos de la medición, no es posible ninguna acción de medir sino se utilizan las reglas de inferencia transitiva, por un lado, y la construcción de la unidad de medida por el otro; respecto a la unidad de medida la creación de unidades estandarizadas y el acuerdo universal para llegar a ellas ha sido un gran logro de la humanidad, pues las unidades se colocan en la mayoría de veces en sistemas de medición en donde las cantidades mayores se miden con unidades grandes, y las cantidades pequeñas con unidades pequeñas; por lo tanto debe darse una regla de conversión para poder pasar de un sistema de medición de unidades pequeñas a unidades grandes, o viceversa. Estas unidades diferentes de un mismo sistema de medición tienen una relación constante entre sí, esta idea no se puede generalizar porque dependiendo del sistema de medición cada uno tendrá la forma de organizar sus

---

<sup>48</sup> NUNES, Terezinha; LIGHT, Paul; MASON, John. Tools for thought: The measurement of length and area. *Learning and instruction*, 1993, vol. 3, no 1, p. 39-54.

unidades de medida. A partir de las diferencias culturales, existe una lógica universal que se emplea en relación con los sistemas de medida.

Tradicionalmente, la meta de la mayoría de las instrucciones de medición es ayudar a los estudiantes a aprender habilidades necesarias para usar una regla convencional. Aunque investigadores coinciden que los estudiantes aprenden a usar varios dispositivos de medición correctamente, existe un cambio en las metas instruccionales hacia la enseñanza de los estudiantes para el desarrollo conceptual en la construcción de unidades de medida que conducen al uso de la regla de manera significativa. Este principio tiene aceptación en algunos nuevos planes de estudios, acerca de la forma de empezar la instrucción de medida con unidades no-estándar y continuar con la regla convencional. Sin embargo, hay un debate en la literatura reciente acerca de los beneficios de comenzar la instrucción con unidades no-estándar. Cualquier ruta instruccional es aceptada, el maestro debe enfocar conversaciones y pensamientos en el sentido que tiene para los estudiantes la actividad de medir.

De acuerdo con Piaget, Inhelder, y Szeminska<sup>49</sup> para los niños pequeños leer una regla y obtener una medida, su lectura no les dirá mayor cosa que el número obtenido, “leer una regla y decir cinco centímetros puede que requiera poca comprensión de la medición”, es posible enseñarles a seguir un procedimiento para leer medidas en una regla, y que exista muy poca comprensión en la medición. Si

---

<sup>49</sup> PIAGET, Jean; INHELDER, Barbel y SZEMINSKA, Alina. *The Child's Conception of Geometry: Translated from the French by EA Lunzer*. Basic Books, 1960.

los niños no se dan cuenta de la importancia de las unidades y de su igualdad para medir, es probable que no las consideren características importantes de la regla ni sepan cómo coordinar números y unidades en una regla<sup>50</sup>.

---

<sup>50</sup> NUNES, Terezinha; LIGHT, Paul; MASON, John. Tools for thought: The measurement of length and area. *Learning and instruction*, 1993, vol. 3, no 1, p. 39-54.

## 2. MATERIALES Y MÉTODOS

Este estudio se ubica en el paradigma de investigación cualitativa-interpretativa. Una de las características de este enfoque es el estudio de casos, por considerarlo una alternativa metodológica que propende por la observación, interpretación y análisis de escenarios culturales naturales, para su comprensión y posterior transformación<sup>51</sup>.

Para Chaves y Weiler, el estudio de caso dentro de su complejidad como enfoque metodológico, tiene la intención de dar respuesta a cómo y por qué ocurren los hechos, por tanto, desde múltiples perspectivas se deben focalizar a los fenómenos en estudio, haciendo que la exploración sea en forma más profunda y el conocimiento obtenido sea más amplio. “No hay mejor recolección de campo que el estar en contacto directo con el fenómeno investigado, vivir la situación, llegar a comprender porque se desarrolla determinado fenómeno y llegar a la interpretación más cercana a la realidad”<sup>52</sup>. Con este tipo de investigaciones la observación tiene el propósito de analizar intensamente el fenómeno para establecer generalizaciones acerca de la población a que pertenece tal unidad. Lo fundamental es que los fenómenos en estudio se encuentren intrínsecamente conectados; de lo contrario no podremos hablar de un caso.

---

<sup>51</sup> DE ALMEIDA, António Frágoso. El estudio de casos en la investigación de educación de personas adultas. En *Investigación y práctica en la educación de personas adultas*. Nau Llibres, 2004. p. 41-60.

<sup>52</sup> CHAVES, Viviana Elizabeth Jiménez; WEILER, Cornelio Comet. Los estudios de casos como enfoque metodológico. *Academo*, 2016, vol. 3, no 2, p. 5.

Este trabajo se basó en un estudio de caso de tipo único, descriptivo, teniendo en cuenta que se pretendió comprender un caso particular como son los errores sistemáticos en el uso de la regla al medir longitudes y sus posibles causas, utilizando fuentes de evidencias; para tal caso se recurrió a ocho actividades.

El presente trabajo se desarrolló en la Institución Educativa Colegio Alberto Lleras Camargo con un grupo de 34 estudiantes de grado quinto. Cabe destacar que uno de los autores del presente trabajo se desempeña como profesor en la institución mencionada y el otro asumió el papel de observador no participante. Como resultado de ello se llevó a cabo una acción investigativa que involucró dos fases fundamentales.

### **Fase 1.**

Antes de analizar los errores de los estudiantes de grado quinto de la Institución Educativa Alberto Lleras Camargo sede Cataluña, se llevó a cabo, una tarea que permitió corroborar que los estudiantes poseen dificultades con ciertas nociones asociadas a la medida de la longitud, sobre todo cuando usan la regla. En esta actividad se le entregó una regla rota para que midieran un segmento de 10cm (ver anexo A).

### **Fase 2.**

Los resultados de la fase 1 fueron fundamentales a la hora de avanzar en la construcción del marco conceptual y la construcción de categorías más específicas en tareas de medida. De la actividad anterior se tomó una muestra de estudiantes

de los cinco grupos, donde se tuvo en cuenta que su respuesta fuese incorrecta, además de su estrategia a la hora de medir; con estos estudiantes se desarrollaron ocho actividades donde se determinaron y analizaron más a fondo los errores en los que incurrieron estos estudiantes cuando desarrollaron tareas de medida.

El propósito de esta fase fue identificar y clasificar el tipo de errores sistemáticos en que incurrieron los estudiantes del estudio de caso, y en particular hacer seguimiento a algunos estudiantes.

Para el desarrollo de esta fase en la institución se contó con espacios académicos (2 horas semanales), en ese sentido el mismo docente responsable de la asignatura asumió en este espacio el desarrollo de la fase 2, el estudio de esta fase involucró las siguientes etapas:

- Caracterización de la población del estudio de caso.
- Diseño de los instrumentos de recolección de la información (actividades).
- Formulación de categorías de análisis e indicadores de la información.
- Validación de instrumentos de recolección de la información con el asesor y a la luz de los aportes del estado del arte de otras investigaciones.
- Aplicación de los instrumentos de recolección de la información, por parte del docente titular que a su vez cumple la función de investigador, el otro, cumple la función de observador no participante.



### **Fase 3.**

Análisis, interpretación y tipificación de errores, en esta fase se establecen las siguientes etapas:

- Sistematización, se organiza y codifican los resultados obtenidos de los instrumentos de información.
- Análisis de los resultados por actividad de los desempeños de los estudiantes comparativamente en cada actividad, además del seguimiento de algunos estudiantes durante todo el proceso.
- Caracterización del tipo de errores sistemáticos en que incurren los estudiantes.

### **Fase 4.**

En esta fase se contrastaron los resultados logrados en el proyecto con los resultados obtenidos en otras investigaciones.

## 2.1. CATEGORÍAS DE ANÁLISIS

Para analizar los resultados obtenidos se elaboraron unas categorías que partieron del marco referencial, basados en los errores al usar instrumentos de medida, surgidas de investigaciones<sup>53</sup> y las propuestas diseñadas para abordar el uso de la regla como instrumento de medida, teniendo en cuenta una nueva condición como es el de regla maleable. Así pues, las categorías sobre las que indagamos acerca de los errores de los estudiantes en el uso de instrumentos de medida de la longitud son:

- División y conservación de la unidad.
- Ausencia del cero.
- Iteración de la unidad, transitividad y aditividad.
- Relación entre número y medición.
- Longitud y distancia.

Cada categoría dio lugar a la obtención de información individual para cada estudiante y comparativamente del grupo, sobre los errores relacionados a los contenidos de dicha categoría. La información obtenida del análisis de las categorías nos facilitó conocer los errores que se evidencian en cada estudiante.

---

<sup>53</sup> (Nunes, Chamorro y Zorrilla, et al. entre otros)

A continuación, se describirán cada una de las categorías de análisis y sus indicadores. Esta estrategia facilitó cumplir los objetivos segundo y tercero de este trabajo y el diseño de las diferentes actividades de medida.

### **2.1.1. División y conservación de la unidad**

Indicadores se tienen los siguientes:

S<sub>11</sub> Usa espacios diferentes al escribir números.

S<sub>12</sub> No reconoce la unidad centímetro ni su subdivisión.

S<sub>13</sub> Secuencia de números sin relación entre espacios y marcas.

S<sub>14</sub> No establece una secuencia de números.

S<sub>15</sub> Importancia de las marcas y no de los espacios.

S<sub>16</sub> Ausencia de números en la regla.

### **2.1.2. Ausencia del cero**

Indicadores se tienen los siguientes:

S<sub>21</sub> Empieza la secuencia en 1.

S<sub>22</sub> Empieza la secuencia en números diferentes al cero y al 1.

S<sub>23</sub> No coloca el cero, pero deja su espacio.

### **2.1.3. Iteración de la unidad, transitividad y aditividad**

S<sub>31</sub> No usa de la regla como objeto intercurrente (intermediario), como un referente por el cual se comparan longitudes de objetos.

S<sub>32</sub> No suma espacios faltantes a las medidas.

S<sub>33</sub> No resta espacios sobrantes a las medidas.

### **2.1.4. Relación entre número y medición**

S<sub>41</sub> Cuenta marcas para emitir juicios de medición.

S<sub>42</sub> Asigna el número de la marca inicial y final en la regla para indicar la longitud del objeto.

S<sub>43</sub> Asigna la medida más larga a segmentos divididos en unidades más grandes.

S<sub>44</sub> Número de la marca como medida en lugar de la cantidad espacio cubierto por el objeto.

### **2.1.5. Longitud y distancia**

S<sub>51</sub> Mide la distancia del punto inicial y final de una línea curva y no su longitud.

S<sub>52</sub> Afirma que la longitud de una línea curva no se puede medir.

S<sub>53</sub> Linealiza las curvas.

S<sub>54</sub> Confunde la longitud de una línea curva cerrada, con otro tipo de medida (diámetro).

### 3. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Las actividades de medición que se presentan a continuación se desarrollaron en forma ordenada, de tal manera que permitieran una mejor comprensión y análisis de la información.

ACTIVIDAD	PROPOSITO	CATEGORIAS DE ANALISIS
A1	Reconocer si dan importancia a la unidad de medida, al reconocimiento de intervalos iguales para una misma unidad en la regla y la importancia que le asignan al cero.	C1. División y conservación de la unidad. S <sub>11</sub> S <sub>12</sub> S <sub>13</sub> S <sub>14</sub> S <sub>15</sub>  C2. Ausencia del cero. S <sub>21</sub> S <sub>22</sub> S <sub>23</sub>
A2	Complementar la comprensión que tienen los estudiantes respecto a la conservación y división de la unidad.	
A3	Evaluar la importancia que le dan a la unidad de medida como intervalos iguales y al cero como punto de graduación.	
A4	Determinar qué papel juega el número y el conteo al asignar una medida	C1. División y conservación de la unidad. S <sub>13</sub> S <sub>14</sub> C4. Relación entre número y medición. S <sub>41</sub> S <sub>43</sub>
A5	Determinar cómo los estudiantes usan la regla en tareas de medida con regla rota, alineando el objeto a medir	C3. Iteración de la unidad, transitividad y aditividad S <sub>31</sub> S <sub>33</sub>

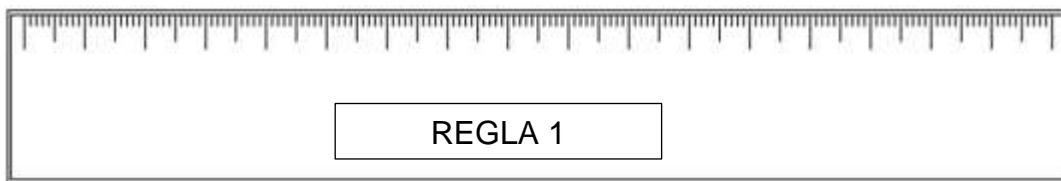
	en las líneas de centímetros y en las líneas de milímetros.	C4. Relación entre número y medición. S <sub>41</sub> S <sub>42</sub> S <sub>44</sub>
A6	Determinar cómo los estudiantes usan la regla en tareas de medida con regla rota y rígida de un mismo objeto.	C1. División y conservación de la unidad. S <sub>11</sub> S <sub>12</sub> S <sub>16</sub> C2. Ausencia del cero. S <sub>21</sub> C3. Iteración de la unidad, transitividad y aditividad. S <sub>33</sub> C4. Relación entre número y medición. S <sub>41</sub> S <sub>42</sub> S <sub>44</sub>
A7	Determinar cómo los estudiantes usan la regla en tareas de medida bajo tres condiciones; la primera en condición de regla rota; la segunda en condición de regla normal y la tercera en condición de regla flexible al medir dos segmentos de recta, una línea curva y una línea cerrada (circunferencia).	C3. Iteración de la unidad, transitividad y aditividad. S <sub>31</sub> S <sub>32</sub> S <sub>33</sub> C4. Relación entre número y medición. S <sub>41</sub> S <sub>42</sub> S <sub>43</sub> S <sub>44</sub> C5. Longitud y distancia. S <sub>51</sub> S <sub>52</sub> S <sub>53</sub> S <sub>54</sub>
A8	Determinar qué acción toman los estudiantes cuando el instrumento de medida es más pequeño que el objeto a medir y cuando el objeto a medir es más largo que el instrumento.	C3. Iteración de la unidad, transitividad y aditividad. S <sub>32</sub> S <sub>33</sub>

La asignación del cumplimiento del indicador se realiza de la siguiente manera: cero (0) indica que no cumple con el indicador y uno (1) que cumple el indicador.

### 3.1. ANÁLISIS ACTIVIDAD 1 (A1)

Se les pidió a los estudiantes que colocaran los números en una regla dibujada con marcas en centímetros, medios centímetros y milímetros, ya que éste es el tipo de regla con la que están familiarizados. Esta tarea se les propuso a los estudiantes con el propósito de reconocer si dan importancia a la unidad de medida, al reconocimiento de intervalos iguales para una misma unidad en la regla y la importancia que le asignan al cero; en pocas palabras cómo los estudiantes conciben la regla y la actividad de medida.

*A1. El siguiente gráfico ilustra una regla. Coloca los números como deben encontrarse en ella.*



*Esta figura se encuentra a escala (1:1,24) de la original*

Las categorías que se analizaron en esta actividad son las siguientes:

C1. División y conservación de la unidad.

S<sub>11</sub> Usa espacios diferentes al escribir números.



S<sub>12</sub> No reconoce la unidad centímetro ni su subdivisión.

S<sub>13</sub> Secuencia de números sin relación entre espacios y marcas.

S<sub>14</sub> No establece una secuencia de números.

S<sub>15</sub> Importancia de las marcas y no de los espacios.

C2. Ausencia del cero.

S<sub>21</sub> Empieza la secuencia en 1.

S<sub>22</sub> Empieza la secuencia de números diferentes al cero y al 1.

S<sub>23</sub> No coloca el cero, pero deja su espacio.

Para hacer el análisis de esta actividad, se seleccionaron los resultados de los estudiantes que hicieron todas las actividades, lo cual permitió evidenciar el comportamiento de los estudiantes frente a las categorías de análisis e indicadores formulados. Se asumió el trabajo de cada alumno codificándolos (E1 a E34).

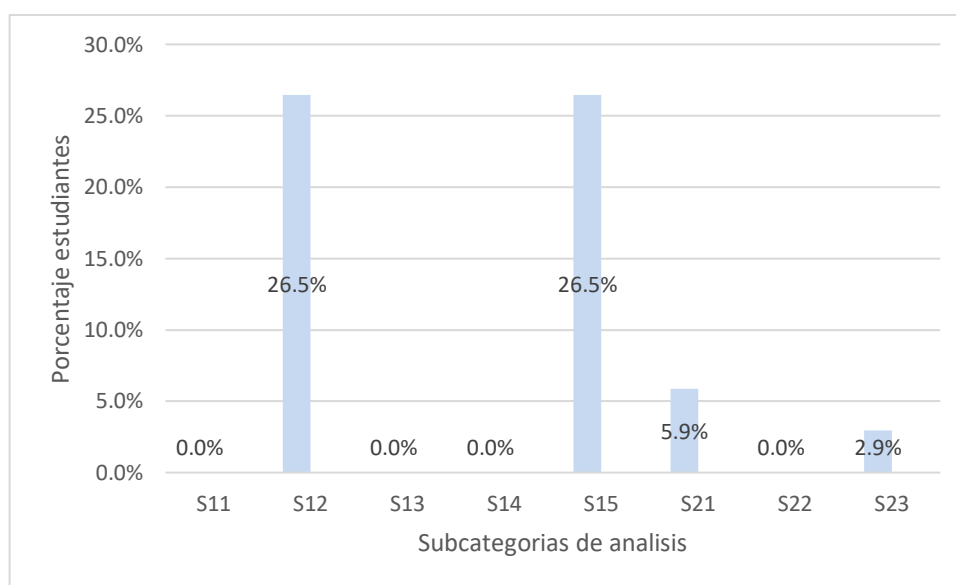
**Tabla 1. Resultados de la actividad de medida 1**

ACTIVIDAD 1								
Estudiante	Categoría 1					Categoría 2		
	S <sub>11</sub>	S <sub>12</sub>	S <sub>13</sub>	S <sub>14</sub>	S <sub>15</sub>	S <sub>21</sub>	S <sub>22</sub>	S <sub>23</sub>
E1	0	1	0	0	1	0	0	0
E2	0	0	0	0	0	0	0	0
E3	0	0	0	0	0	0	0	0

E4	0	1	0	0	1	0	0	0
E5	0	0	0	0	0	0	0	0
E6	0	0	0	0	0	0	0	0
E7	0	1	0	0	1	1	0	0
E8	0	0	0	0	0	0	0	0
E9	0	0	0	0	0	0	0	0
E10	0	0	0	0	0	0	0	0
E11	0	0	0	0	0	0	0	0
E12	0	1	0	0	1	0	0	0
E13	0	0	0	0	0	0	0	0
E14	0	1	0	0	1	0	0	0
E15	0	0	0	0	0	0	0	0
E16	0	0	0	0	0	0	0	0
E17	0	0	0	0	0	0	0	0
E18	0	0	0	0	0	0	0	0
E19	0	0	0	0	0	0	0	0
E20	0	1	0	0	1	1	0	1
E21	0	0	0	0	0	0	0	0
E22	0	0	0	0	0	0	0	0
E23	0	0	0	0	0	0	0	0
E24	0	0	0	0	0	0	0	0
E25	0	0	0	0	0	0	0	0
E26	0	0	0	0	0	0	0	0
E27	0	0	0	0	0	0	0	0
E28	0	1	0	0	1	0	0	0
E29	0	1	0	0	1	0	0	0
E30	0	0	0	0	0	0	0	0

E31	0	0	0	0	0	0	0	0
E32	0	0	0	0	0	0	0	0
E33	0	1	0	0	1	0	0	0
E34	0	0	0	0	0	0	0	0
Total	0	9	0	0	9	2	0	1

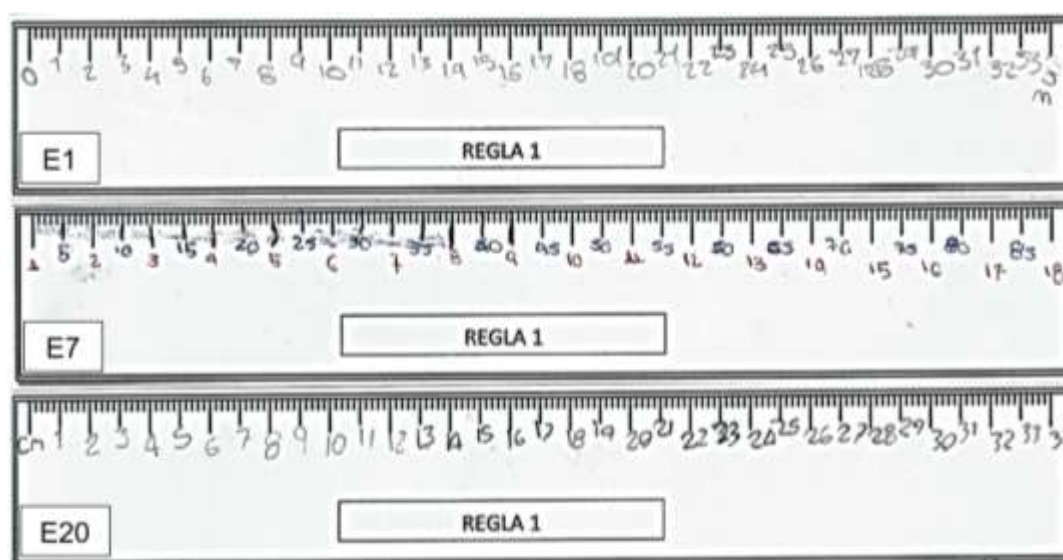
**Gráfica 1. Resultados tabla 1 actividad 1**



Al pedir a los estudiantes que asignen los números a una regla marcada en centímetros y medios centímetros, se revela cómo entienden la conservación de la unidad. Esta actividad permite determinar si los estudiantes reconocen la unidad centímetro; además de identificar que esta unidad en una regla común se encuentra dividida en milímetros. La mayoría de estudiantes comprenden que las unidades deben ser adyacentes en la regla sin cambiar el tamaño de la unidad (espacio entre marcas); caso contrario de los estudiantes E1, E4, E12, E14, E20, E28, E29 y E33, quienes colocan los números en la regla en los centímetros y en los medios

centímetros, es así como la regla de 17cm, para ellos mide 34cm. E7 aunque enumera bien los centímetros, en los milímetros pone una secuencia de 5 en 5 sin relacionarse con la cantidad de milímetros que hay en la regla (S<sub>12</sub> S<sub>15</sub>). Adicionalmente E7 empieza a enumerar la regla a partir del uno (S<sub>21</sub>) y E20 empieza a enumerar la regla en 1 pero deja espacio al iniciar la numeración, en dicho espacio escribe cm (S<sub>21</sub> S<sub>23</sub>). Estos errores según Deitz et al.<sup>54</sup> en su investigación sobre el aprendizaje de la medición de longitudes lineales rectas, son dificultades de los estudiantes de primaria y secundaria al indicar que la regla comienza en 1, y al contar marcas o números en una regla y no el reconocimiento de la unidad centímetro y su subdivisión milímetro.

### Ilustración 1. Respuestas estudiantes E1, E7 y E20 actividad 1



*Esta figura se encuentra a escala (1:1,24) de la original*

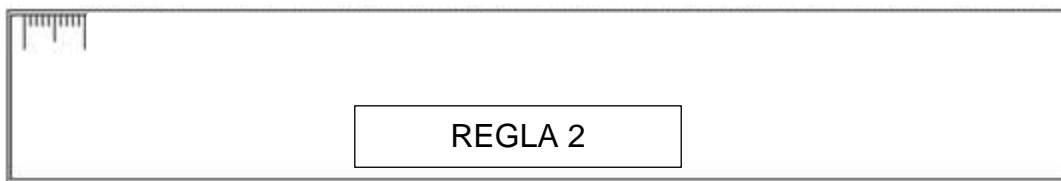
<sup>54</sup> DEITZ, Kevin, et al. Children's understanding of ruler measurement and units of measure: A training study. En *Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society*. 2009, p. 2391- 2394.

De lo anterior se puede afirmar que la mayoría de los estudiantes reconocen la unidad centímetro y que esta unidad es posible dividirla en milímetros, pero no da cuenta si los estudiantes son capaces de conservar la unidad al iterarla y dividirla; por esta razón las actividades 2 y 3, se proponen para lograr realizar un mejor análisis de esta categoría, por tanto, cuando los estudiantes comprenden que las unidades son divisibles, ellos empiezan a comprender la idea de que la longitud es continua<sup>55</sup>.

### 3.2. ANÁLISIS ACTIVIDAD 2 (A2)

Esta actividad es complementaria a la anterior, debido a que no se tenía claridad acerca de la comprensión que tenían los estudiantes respecto a la conservación, división de la unidad y la ausencia del cero, por tal razón, se proporcionó una tarea muy similar que consistía en entregar una hoja con la gráfica de una regla, teniendo en cuenta que sólo se ve en ella la primera unidad dada en centímetros y dividida en milímetros, y los estudiantes debían completarla.

*A2. El siguiente gráfico ilustra una regla, donde se indica la primera unidad dada en centímetros y milímetros. Completa la regla.*



*Esta figura se encuentra a escala (1:1,24) de la original*

<sup>55</sup> NUNES, Terezinha; LIGHT, Paul; MASON, John. Tools for thought: The measurement of length and area. *Learning and instruction*, 1993, vol. 3, no 1, p. 39-54.

Las categorías que se analizaron en esta actividad son las siguientes:

C1. División y conservación de la unidad.

S<sub>11</sub> Usar espacios diferentes al escribir números.

S<sub>12</sub> No reconoce la unidad centímetro ni su subdivisión.

S<sub>13</sub> Secuencia de números sin relación entre espacios y marcas.

S<sub>14</sub> No establece una secuencia de números.

S<sub>15</sub> Importancia de las marcas y no de los espacios.

S<sub>16</sub> Ausencia de números en la regla.

C2. Ausencia del cero.

S<sub>21</sub> Empieza la secuencia en 1.

S<sub>22</sub> Empieza la secuencia de números diferentes al cero y al 1.

S<sub>23</sub> No coloca el cero, pero deja su espacio.

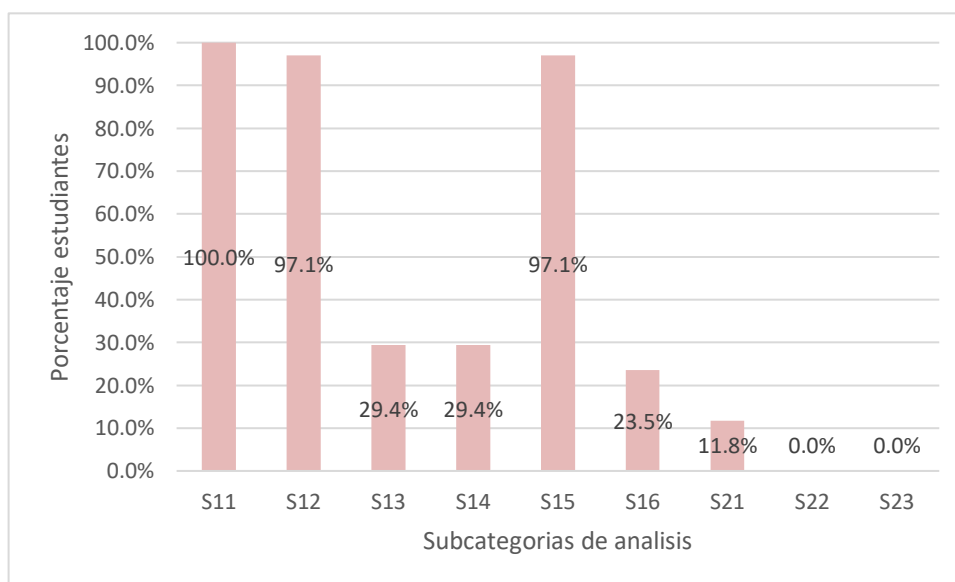
**Tabla 2. Resultados actividad 2**

ACTIVIDAD 2									
Estudiante	Categoría 1						Categoría 2		
	S <sub>11</sub>	S <sub>12</sub>	S <sub>13</sub>	S <sub>14</sub>	S <sub>15</sub>	S <sub>16</sub>	S <sub>21</sub>	S <sub>22</sub>	S <sub>23</sub>
E1	1	1	1	1	1	0	0	0	0

E2	1	1	1	1	1	1	0	0	0
E3	1	1	0	0	1	0	0	0	0
E4	1	1	0	0	1	0	0	0	0
E5	1	1	0	0	1	0	0	0	0
E6	1	1	0	0	1	0	0	0	0
E7	1	1	1	1	1	1	0	0	0
E8	1	1	0	0	1	0	0	0	0
E9	1	1	0	0	1	0	1	0	0
E10	1	1	0	0	1	0	0	0	0
E11	1	1	0	0	1	0	0	0	0
E12	1	1	1	1	1	1	0	0	0
E13	1	1	0	0	1	0	0	0	0
E14	1	1	1	1	1	1	0	0	0
E15	1	1	0	0	1	0	0	0	0
E16	1	1	1	1	1	1	0	0	0
E17	1	1	0	0	1	0	1	0	0
E18	1	1	0	0	1	0	0	0	0
E19	1	1	0	0	1	0	1	0	0
E20	1	1	0	0	1	0	1	0	0
E21	1	0	0	0	0	0	0	0	0
E22	1	1	1	1	1	1	0	0	0
E23	1	1	0	0	1	0	0	0	0
E24	1	1	1	1	1	1	0	0	0
E25	1	1	0	0	1	0	0	0	0
E26	1	1	0	0	1	0	0	0	0
E27	1	1	0	0	1	0	0	0	0
E28	1	1	0	0	1	0	0	0	0

E29	1	1	0	0	1	0	0	0	0
E30	1	1	0	0	1	0	0	0	0
E31	1	1	0	0	1	0	0	0	0
E32	1	1	1	1	1	1	0	0	0
E33	1	1	1	1	1	0	0	0	0
E34	1	1	0	0	1	0	0	0	0
Total	34	33	10	10	33	8	4	0	0

**Gráfica 2. Resultados tabla 2 actividad 2**



Al pedir a los estudiantes que observen el dibujo de una regla y la completen colocando los números como deben encontrarse en ella (actividad 2); se pudo constatar que los estudiantes no conservan la unidad centímetro es decir usan espacios diferentes para cada unidad (S<sub>11</sub>); por tal motivo no reconocen la unidad centímetro y su subdivisión (S<sub>12</sub>), dando más importancia a las marcas y no a los

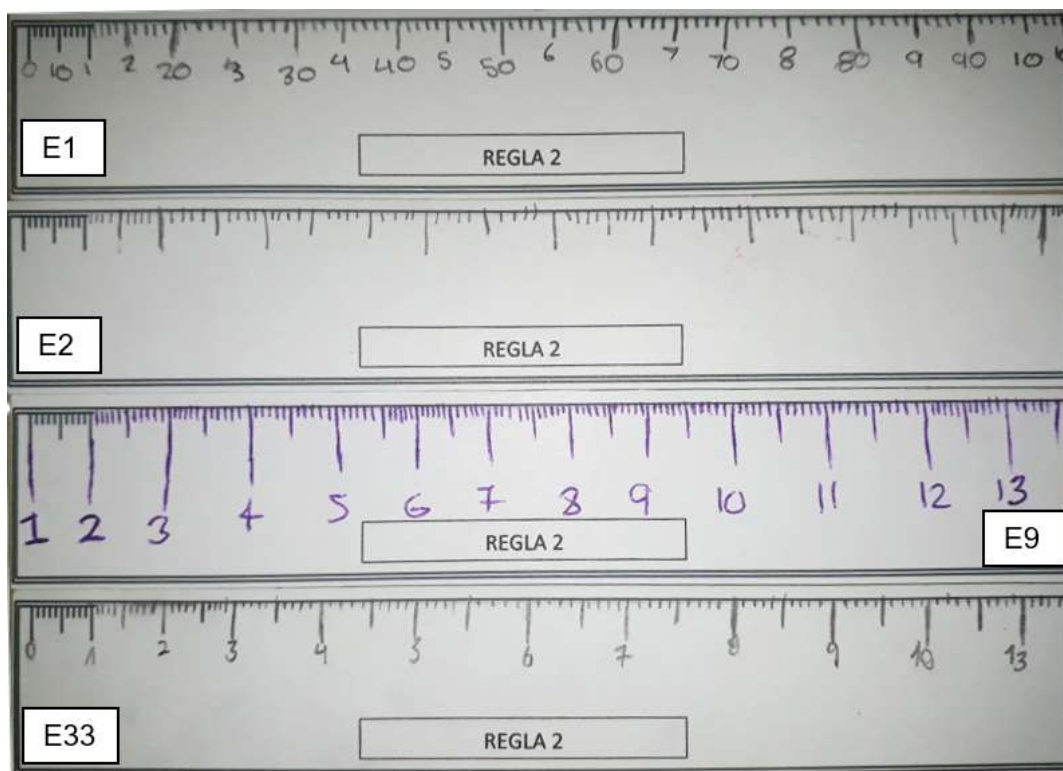


espacios ( $S_{15}$ ). Solo el estudiante E21 logra establecer una aproximación al centímetro indicando la cantidad precisa de milímetros.

Es de resaltar que los siguientes estudiantes E1, E2, E7, E12, E14, E16, E22, E24, E32 y E33 cometieron los errores mencionados ( $S_{11}$ ,  $S_{12}$ ,  $S_{15}$ ) y adicionalmente no establecen secuencias y no las relacionan entre los espacios y las marcas ( $S_{13}$  y  $S_{14}$ ). E1 presenta secuencias incorrectas entre las marcas de los milímetros y de los centímetros, E33 escribe una secuencia correcta hasta 10cm y en la siguiente marca escribe 13cm, es decir no posee una secuencia correcta de números ( $S_{14}$ ), como se puede ver en la ilustración 2.

En relación a la importancia que los estudiantes le dan al cero, se encontró que cuatro estudiantes E9, E17, E19 y E20 empiezan la secuencia en 1 ( $S_{21}$ ), ningún estudiante empezó la secuencia con números diferentes al cero y al 1 ( $S_{22}$ ), pero los estudiantes E2, E7, E12, E14, E16, E22, E24 y E32 no colocan números en la regla, aunque éste no necesariamente es un error, la ausencia de números en ella si puede inducir al error ( $S_{16}$ ). De igual forma se observa que el colocar el cero al principio no es relevante en ellos a la hora de dibujar una regla, es decir, se puede concluir que al medir con la regla pueden hacer caso omiso al cero y contar la primera línea empezando desde uno. En general la mayoría de los estudiantes no conservan la unidad y dejan de colocar el cero al principio en la secuencia de números de la regla.

## Ilustración 2. Respuestas estudiantes E1, E2, E9 y E33 actividad 2



*Estas figuras se encuentran a escala (1:1,24) de la original*

### 3.3. ANÁLISIS ACTIVIDAD 3 (A3)

La tarea consistió en pedir a los estudiantes que dieran su apreciación acerca de las reglas, si se habían dibujado adecuadamente (conservación de la unidad, subdivisión de la unidad, secuencia numérica), con el fin de evaluar la importancia que le dan a la unidad de medida como intervalos iguales y al cero como punto de graduación.

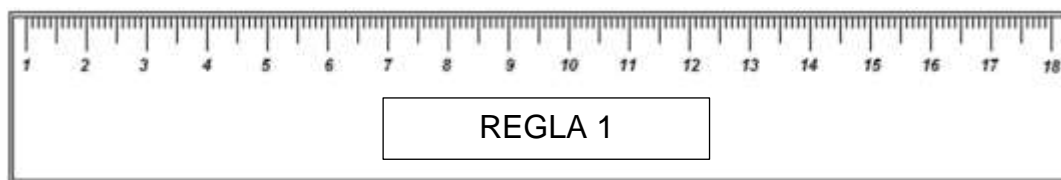
Basados en ello se entregó a cada uno 8 reglas dibujadas, la primera estaba marcada en centímetros, medios centímetros y milímetros y su numeración comenzaba a partir de uno; la segunda, estaba marcada en centímetros, medios centímetros y milímetros y su numeración comenzaba a partir de cero; la tercera marcada con líneas a intervalos desiguales, comenzando desde cero y la secuencia numérica correcta; la cuarta, marcada con líneas a intervalos desiguales pero conservando que la secuencia numérica fuera correcta, comenzando desde el uno.

La quinta, estaba marcada en centímetros, medios centímetros y milímetros, la secuencia numérica era incorrecta y su numeración comenzaba a partir del cero; la sexta, estaba marcada en centímetros, medios centímetros y milímetros, la secuencia numérica era incorrecta y su numeración comenzaba a partir de uno; la séptima, marcada con líneas a intervalos desiguales, comenzando desde cero y la secuencia numérica era incorrecta; por último una regla marcada con líneas a intervalos desiguales, comenzando desde uno y la secuencia numérica era incorrecta. Cabe anotar que algunas de estas actividades son tomadas de Nunes, T. P. Light y Mason, J.<sup>56</sup>.

*A3. El siguiente gráfico ilustra ocho reglas, determina cuales de ellas están dibujadas adecuadamente*

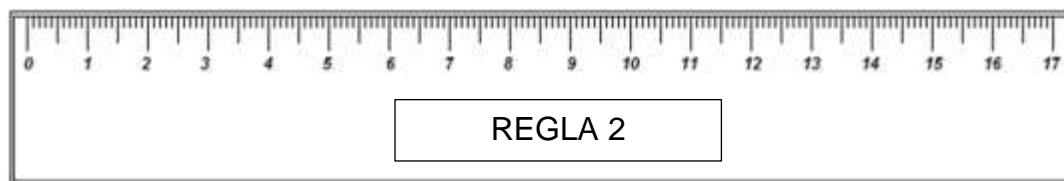
---

<sup>56</sup> NUNES, Terezinha; LIGHT, Paul; MASON, John. Tools for thought: The measurement of length and area. *Learning and instruction*, 1993, vol. 3, no 1, p. 39-54



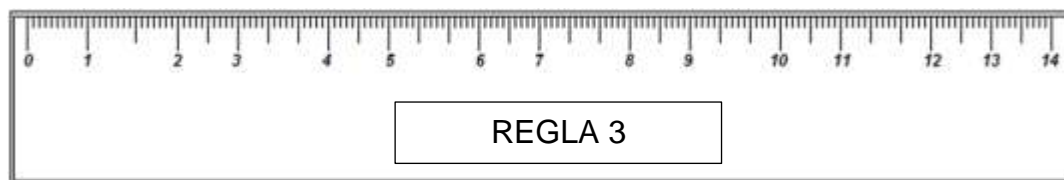
Justifique su respuesta

---



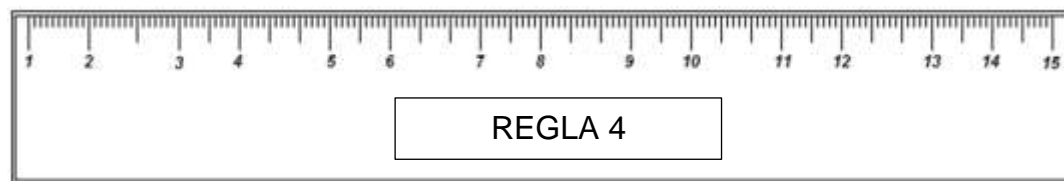
Justifique su respuesta

---



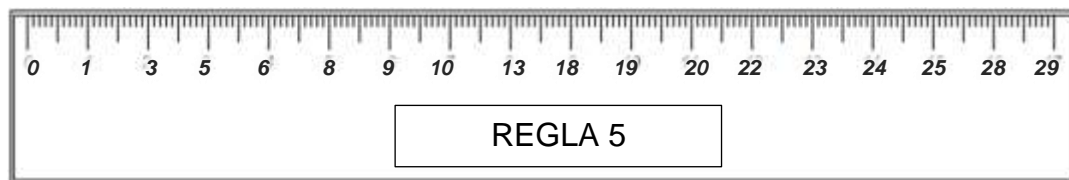
Justifique su respuesta

---



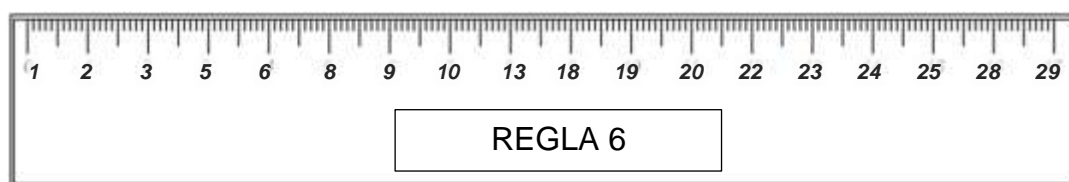
Justifique su respuesta

---



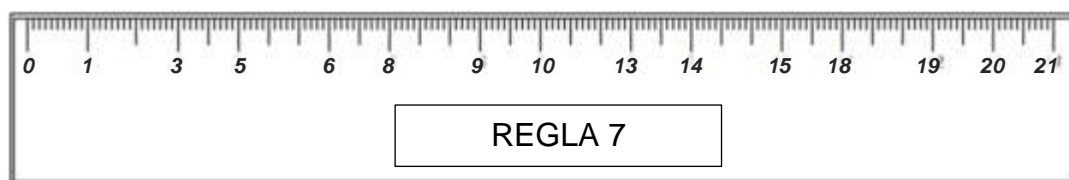
Justifique su respuesta

---



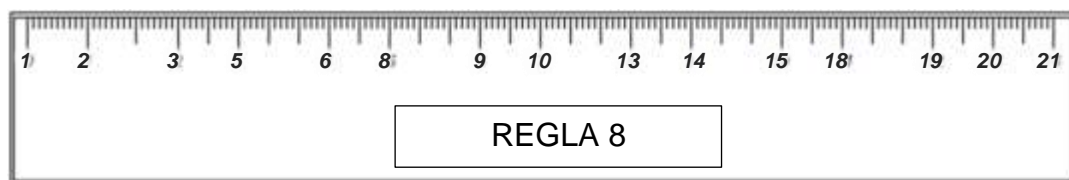
Justifique su respuesta

---



Justifique su respuesta

---



Justifique su respuesta

---

*Estas figuras se encuentran a escala (1:1,24) de la original*

Las categorías que se analizaron en esta actividad son las siguientes:

C1. División y conservación de la unidad.

S<sub>11</sub> Usa espacios diferentes al escribir números.

S<sub>12</sub> No reconoce la unidad centímetro ni su subdivisión.

S<sub>13</sub> Secuencia de números sin relación entre espacios y marcas.

S<sub>14</sub> No establece una secuencia de números.

S<sub>15</sub> Importancia de las marcas y no de los espacios.

C2. Ausencia del cero.

S<sub>21</sub> Empieza la secuencia en 1.

S<sub>22</sub> Empieza la secuencia de números diferentes al cero y al 1.

S<sub>23</sub> No coloca el cero, pero deja su espacio.

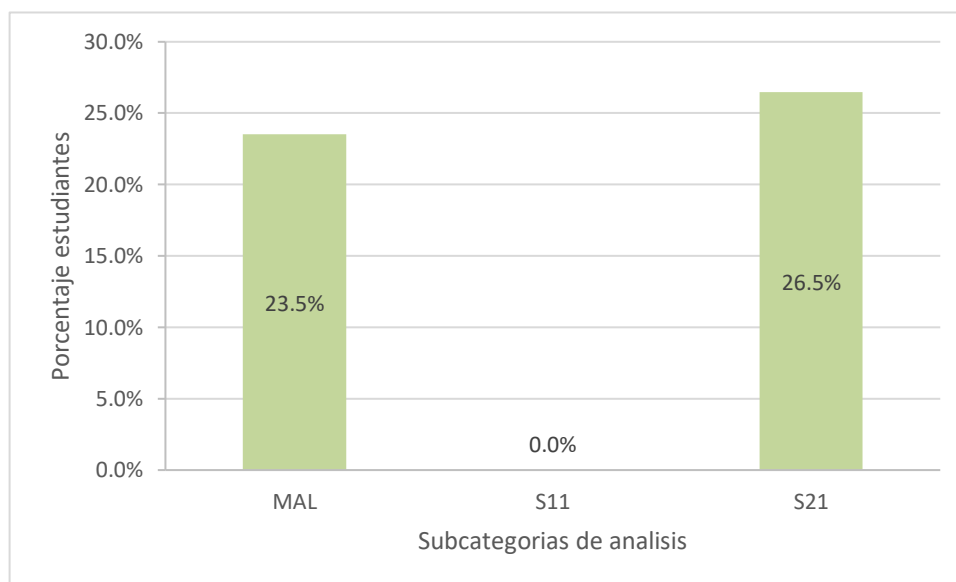
**Tabla 3. Resultados actividad 3 regla 1**

ACTIVIDAD 3				
REGLA 1				
ESTUDIANTE	RESPUESTA		C1	C2
	BIEN	MAL	S <sub>11</sub>	S <sub>21</sub>

E1	0	0	0
E2	1	0	1
E3	0	0	0
E4	0	0	0
E5	0	0	0
E6	0	0	0
E7	0	0	0
E8	0	0	0
E9	0	0	0
E10	0	0	0
E11	0	0	0
E12	0	0	0
E13	0	0	0
E14	0	0	0
E15	0	0	0
E16	1	0	1
E17	0	0	0
E18	1	0	1
E19	0	0	0
E20	0	0	0
E21	0	0	0
E22	0	0	0
E23	0	0	1
E24	0	0	0
E25	0	0	0
E26	1	0	1
E27	0	0	0

E28	1	0	1
E29	0	0	0
E30	1	0	1
E31	0	0	0
E32	1	0	1
E33	0	0	0
E34	1	0	1
<b>TOTAL</b>	<b>8</b>	<b>0</b>	<b>9</b>

**Gráfica 3. Resultados tabla 3 actividad 3 regla 1**

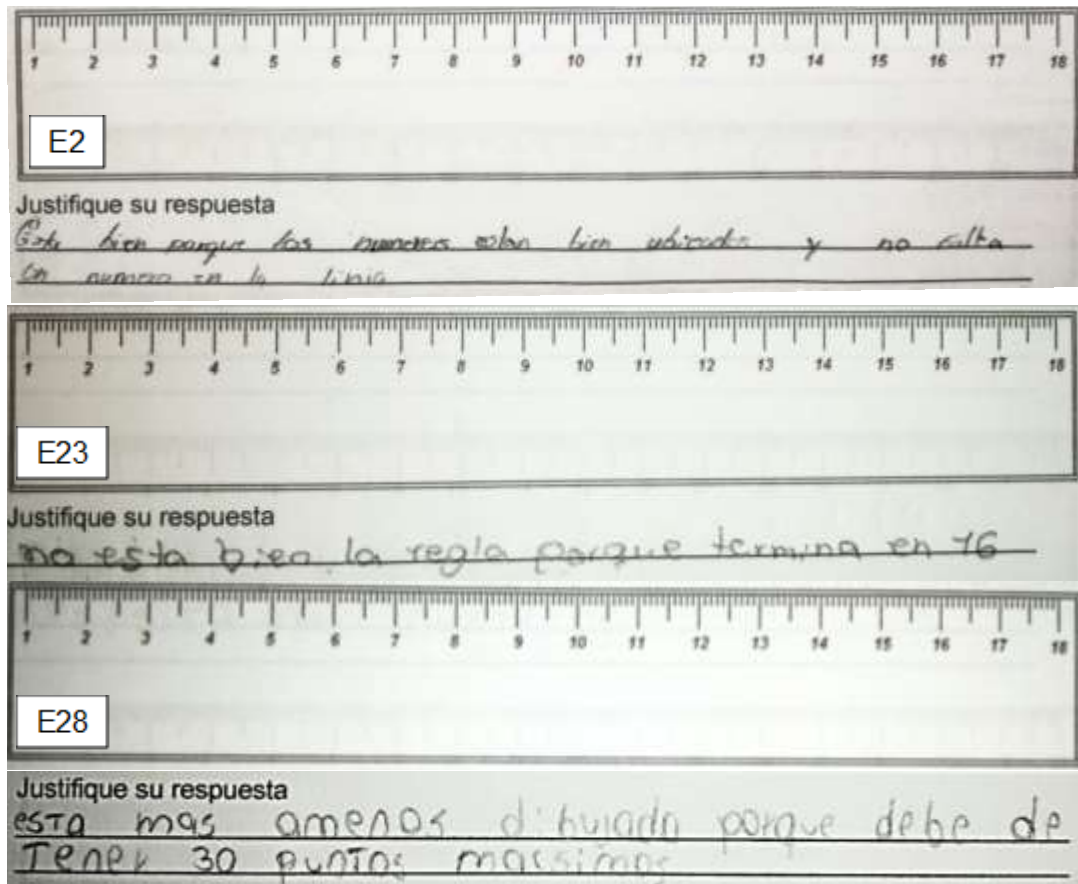


Los estudiantes comprenden que la unidad se conserva, la mayoría de ellos enfatizan en la importancia que tiene el cero en la regla, aunque para E2, E16, E18, E26, E28, E30, E32 y E34 las reglas deben comenzar en uno debido a que relaciona el conteo de líneas con la asignación de números, E23 por su parte menciona que



la regla no está bien, pero su justificación no tiene en cuenta la ausencia del cero, como se puede observar en la siguiente ilustración.

**Ilustración 3. Respuestas estudiantes E2, E23, y E28 actividad 3 regla 1**



*Estas figuras se encuentran a escala (1:1,24) de la original*

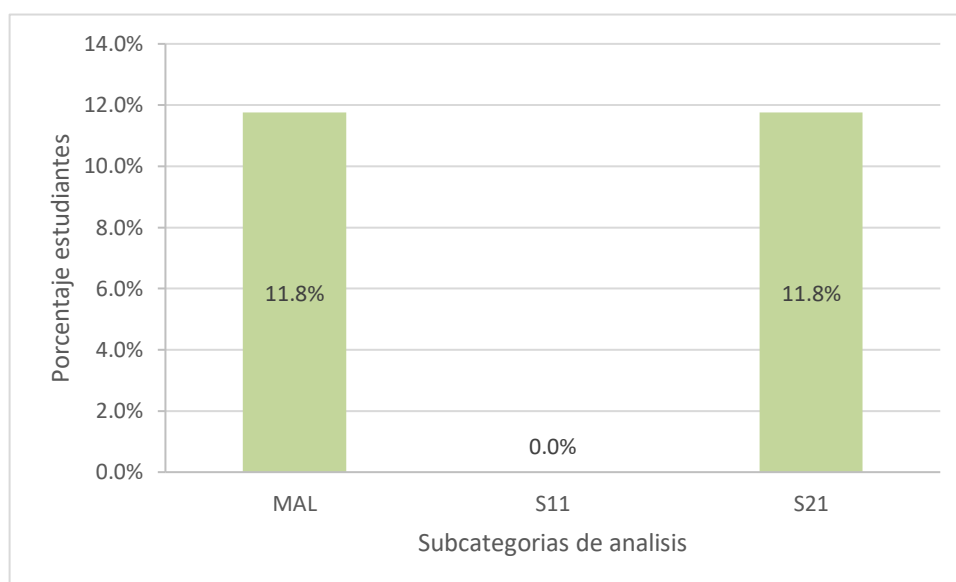
**Tabla 4. Resultados actividad 3 regla 2**

ACTIVIDAD 3				
REGLA 2				
ESTUDIANTE	RESPUESTA		C1	C2
	BIEN	MAL	S <sub>11</sub>	S <sub>21</sub>
E1	0		0	0

E2	0	0	0
E3	0	0	0
E4	0	0	0
E5	0	0	0
E6	0	0	0
E7	0	0	0
E8	0	0	0
E9	0	0	0
E10	0	0	0
E11	0	0	0
E12	0	0	0
E13	0	0	0
E14	0	0	0
E15	0	0	0
E16	0	0	0
E17	0	0	0
E18	1	0	1
E19	0	0	0
E20	1	0	1
E21	0	0	0
E22	0	0	0
E23	1	0	1
E24	0	0	0
E25	0	0	0
E26	0	0	0
E27	0	0	0
E28	0	0	0

E29	0	0	0
E30	0	0	0
E31	0	0	0
E32	1	0	1
E33	0	0	0
E34	0	0	0
<b>TOTAL</b>	<b>4</b>	<b>0</b>	<b>4</b>

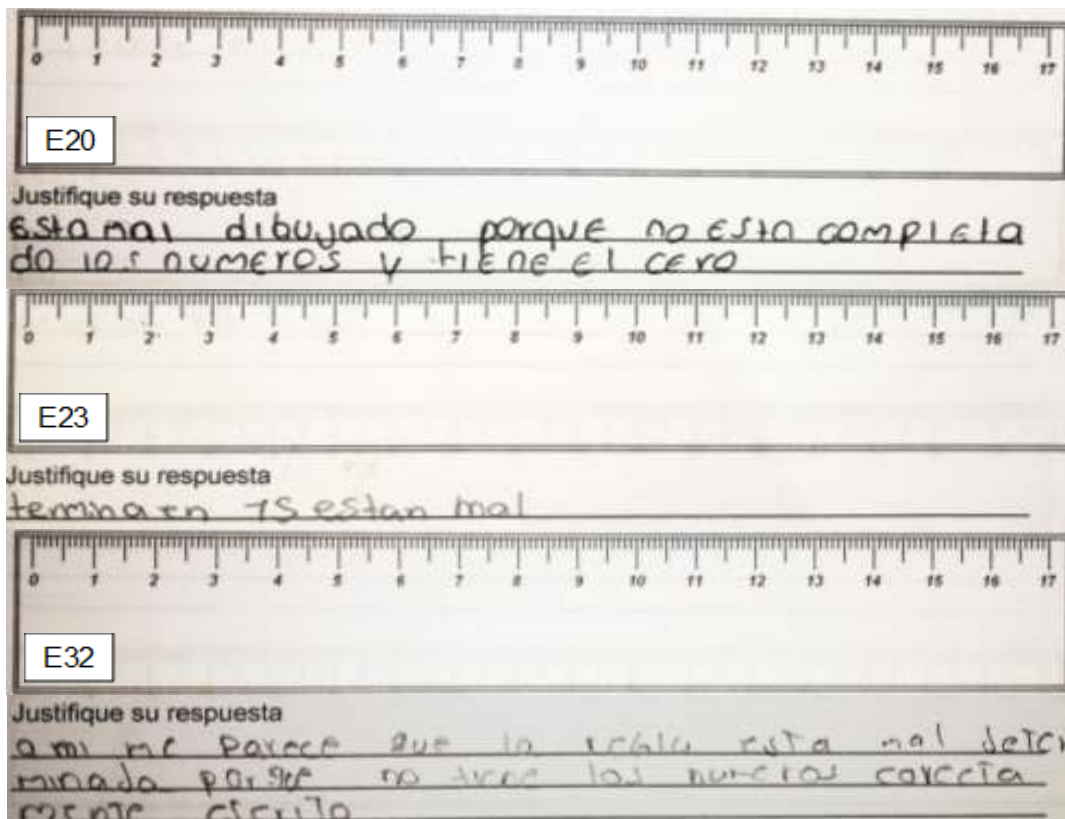
**Gráfica 4. Resultados tabla 4 actividad 3 regla 2**



Al igual que en las respuestas de la regla uno, los estudiantes muestran coherencia entre sus afirmaciones, ellos comprenden que la unidad se conserva, hacen énfasis en la importancia que tiene el cero en la regla, de la misma forma E32 afirma que *“la regla está mal porque no tiene los números correctamente escritos”*, para este estudiante debe comenzar en uno, E18 y E23 continúan en el error respecto a la regla uno, afirmando que la regla dos está mal y E20 justifica que la regla está mal

dibujada y se contradice a la respuesta dada en la regla uno, como se observa en la siguiente ilustración.

**Ilustración 4. Respuestas estudiantes E20, E23, y E32 actividad 3 regla 2**



*Estas figuras se encuentran a escala (1:1,24) de la original*

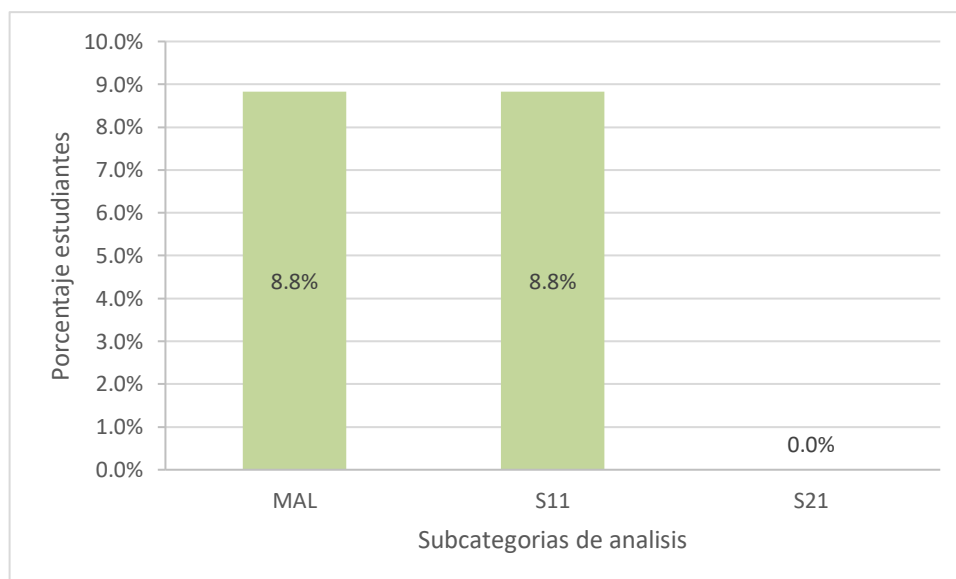
**Tabla 5. Resultado actividad 3 regla 3**

ACTIVIDAD 3				
REGLA 3				
ESTUDIANTE	RESPUESTA		C1	C2
	BIEN	MAL	S <sub>11</sub>	S <sub>21</sub>
E1	0		0	0

E2	0	0	0
E3	0	0	0
E4	1	1	0
E5	0	0	0
E6	0	0	0
E7	0	0	0
E8	0	0	0
E9	0	0	0
E10	0	0	0
E11	0	0	0
E12	0	0	0
E13	0	0	0
E14	0	0	0
E15	0	0	0
E16	0	0	0
E17	0	0	0
E18	1	1	0
E19	0	0	0
E20	0	0	0
E21	0	0	0
E22	0	0	0
E23	0	0	0
E24	0	0	0
E25	0	0	0
E26	0	0	0
E27	0	0	0
E28	1	1	0

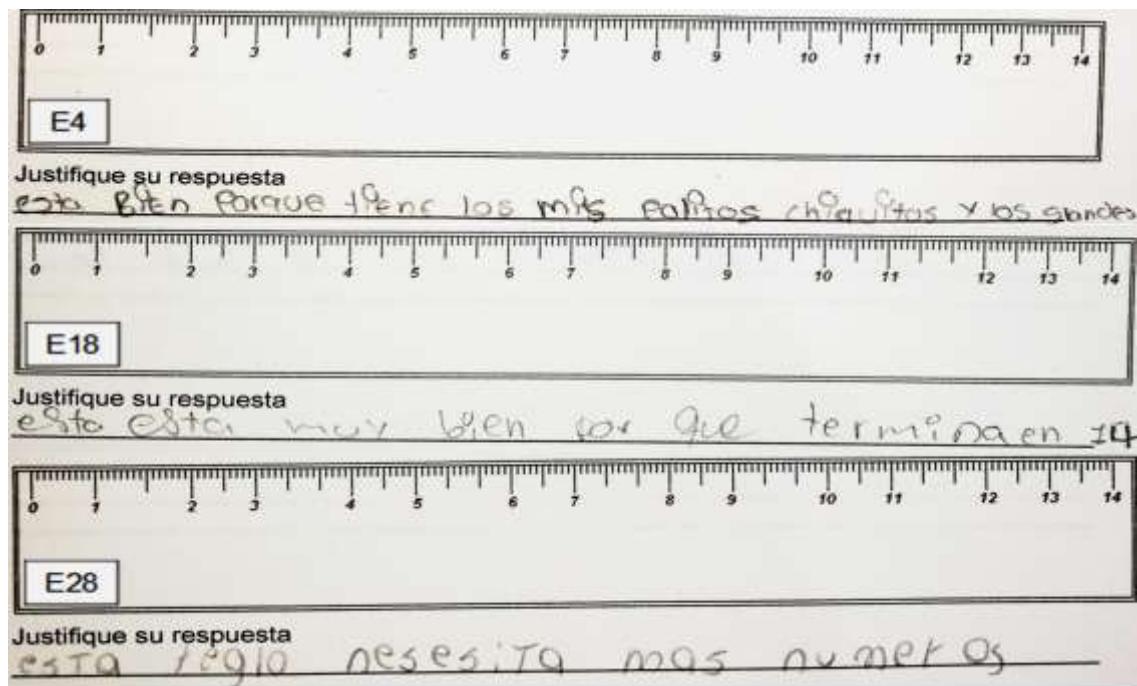
E29	0	0	0
E30	0	0	0
E31	0	0	0
E32	0	0	0
E33	0	0	0
E34	0	0	0
<b>TOTAL</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>0</b>

**Gráfica 5. Resultado tabla 5 actividad 3 regla 3**



Es importante observar la respuesta del estudiante E18 en la ilustración 5, para él, la regla 3 está bien dibujada por el hecho de terminar en 14, no da importancia a los espacios entre marcas, sino a la secuencia de números. E28 sólo menciona que la regla necesita más números; E4 contradice la afirmación hecha en las reglas anteriores debido a que él no conserva la unidad; los otros estudiantes coinciden con las aseveraciones hechas en las reglas uno y dos.

**Ilustración 5. Respuestas estudiantes E4, E18, y E28 actividad 3 regla 3**



*Estas figuras se encuentran a escala (1:1,24) de la original*

**Tabla 6. Resultados actividad 3 regla 4**

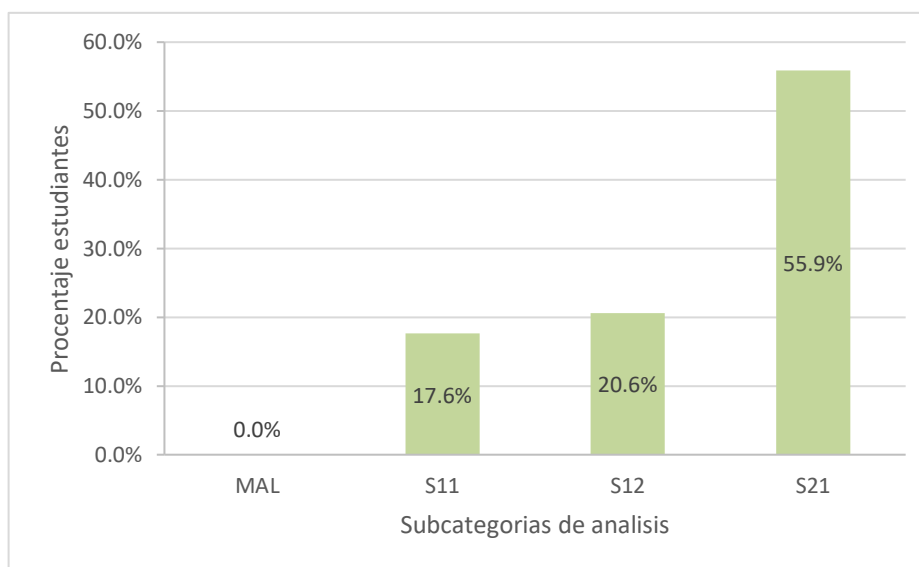
ACTIVIDAD 3					
REGLA 4					
ESTUDIANTE	RESPUESTA		C1		C2
	BIEN	MAL	S <sub>11</sub>	S <sub>12</sub>	S <sub>21</sub>
E1	0		0	0	1
E2	0		0	0	0
E3	0		0	0	0
E4	0		0	0	0
E5	0		1	1	0

E6	0	1	1	0
E7	0	0	0	1
E8	0	0	0	1
E9	0	0	0	1
E10	0	0	0	1
E11	0	0	0	0
E12	0	0	0	1
E13	0	0	0	1
E14	0	1	1	0
E15	0	0	0	1
E16	0	0	0	1
E17	0	0	0	0
E18	0	1	1	1
E19	0	0	0	0
E20	0	0	0	0
E21	0	0	0	0
E22	0	0	0	1
E23	0	0	0	1
E24	0	0	0	0
E25	0	0	1	1
E26	0	0	0	1
E27	0	0	0	0
E28	0	1	1	1
E29	0	0	0	1
E30	0	0	0	1
E31	0	0	0	0



E32	0	1	1	1
E33	0	0	0	0
E34	0	0	0	1
<b>TOTAL</b>	<b>0</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>19</b>

**Gráfica 6. Resultado tabla 6 actividad 3 regla 4**



En este tipo de regla los estudiantes manifestaron que estaba mal dibujada, pero encontramos que su justificación carecía de significado o no tenían en cuenta todas las características de la regla. Los estudiantes E1, E7, E8, E9, E10, E12, E13, E15, E16, E22, E23, E26, E29, E30 y E34 identificaron que la regla usaba espacios diferentes al escribir los números, por tanto no conservaba la unidad, pero no mencionaron nada respecto a la ausencia del cero ( $S_{21}$ ); por su parte los estudiantes E5, E6 y E14 reconocen la ausencia del cero, pero no le dan importancia a los espacios( $S_{11}$ ), ni reconocen la unidad ( $S_{12}$ ), lo contrario a los estudiantes mencionados anteriormente. E25 indica que la regla usa diferentes espacios al

escribir los números, sin embargo, no reconoce la unidad centímetro ni su subdivisión ( $S_{12}$ ) además, no tiene en cuenta la ausencia del cero ( $S_{21}$ ). Por último, los estudiantes E18, E28 y E32 no dan razón de ningún error presente en la regla.

#### Ilustración 6. Respuestas estudiantes E1, E5, E25 y E28 actividad 3 regla 4

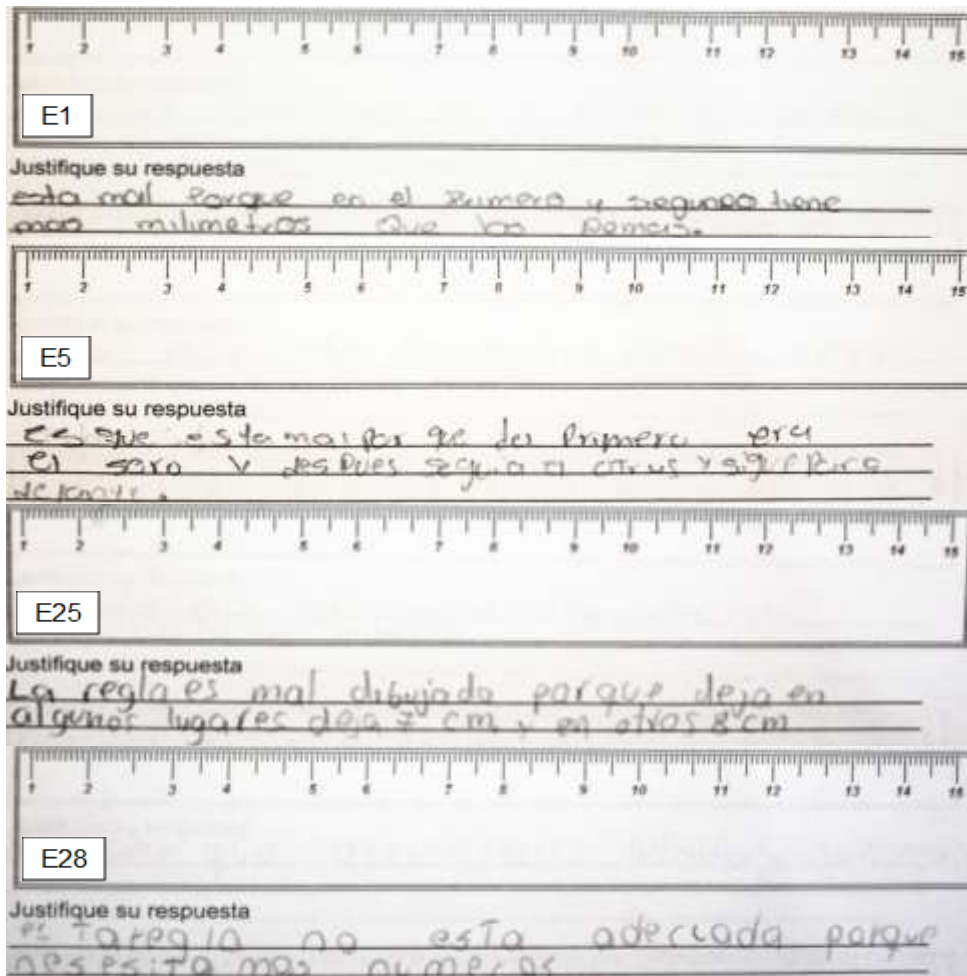


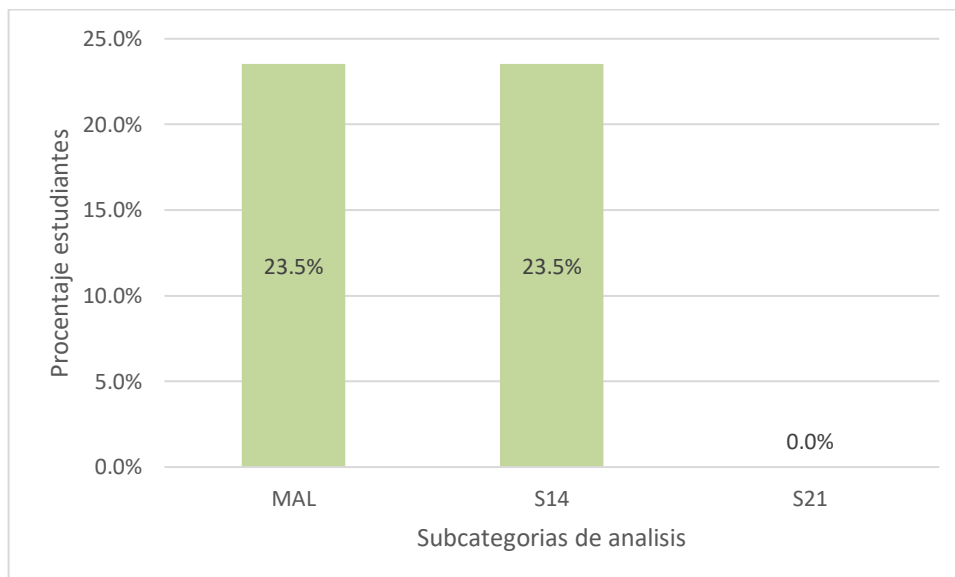
Tabla 7. Resultados actividad 3 regla 5

ACTIVIDAD 3			
REGLA 5			
ESTUDIANTE	RESPUESTA	C1	C2

	BIEN	MAL	S <sub>14</sub>	S <sub>21</sub>
E1	0		0	0
E2	0		0	0
E3	0		0	0
E4	0		0	0
E5	1		1	0
E6	0		0	0
E7	0		0	0
E8	0		0	0
E9	0		0	0
E10	0		0	0
E11	0		0	0
E12	1		1	0
E13	0		0	0
E14	1		1	0
E15	1		1	0
E16	0		0	0
E17	0		0	0
E18	0		0	0
E19	1		1	0
E20	1		1	0
E21	0		0	0
E22	0		0	0
E23	0		0	0
E24	1		1	0
E25	0		0	0


E26	0	0	0
E27	0	0	0
E28	1	1	0
E29	0	0	0
E30	0	0	0
E31	0	0	0
E32	0	0	0
E33	0	0	0
E34	0	0	0
<b>TOTAL</b>	<b>8</b>	<b>8</b>	<b>0</b>

**Gráfica 7. Resultado tabla 7 actividad 3 regla 5**



En este tipo de regla los estudiantes E5, E12, E14, E15, E19, E20, E24 y E28, indicaron que la regla estaba bien dibujada porque se conserva la unidad, pero no tuvieron en cuenta la secuencia de números ( $S_{14}$ ), ellos encuentran aspectos particulares de la regla, pero no la analizan en su totalidad.


**Ilustración 7. Respuestas estudiantes E5, E12, y E15 actividad 3 regla 5**



E5

Justifique su respuesta


en esta regla si esta bien por que los milímetros y los números estan perfectos! si ningún error



E12

Justifique su respuesta

me parece que esta bien por que comienza de cero



E15

Justifique su respuesta

si porque la regla que esta calculando esta muy bien hecha y con los números bien ubicados y los valores tambien estan muy ubicados.

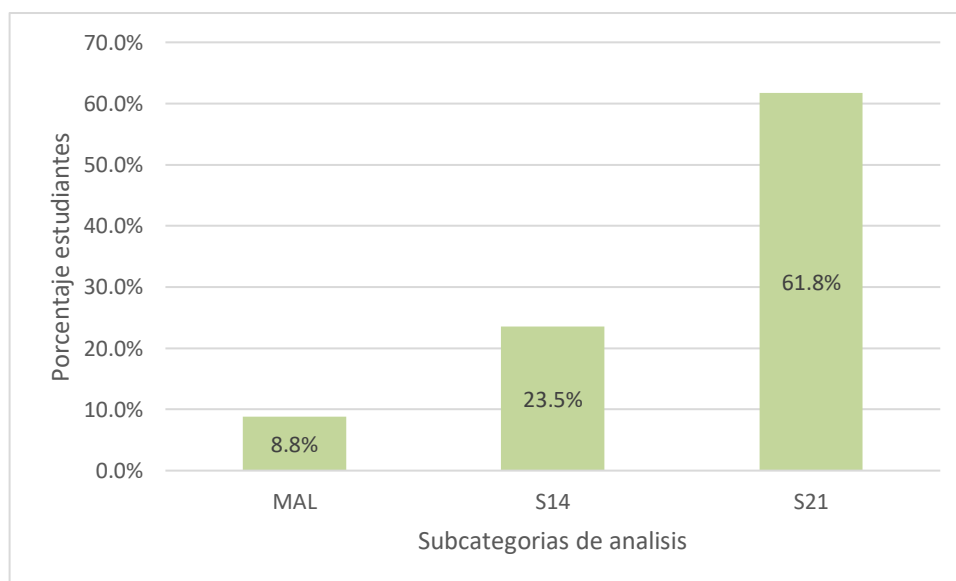
**Tabla 8. Resultados actividad 3 regla 6**

ACTIVIDAD 3				
REGLA 6				
ESTUDIANTE	RESPUESTA		C1	C2
	BIEN	MAL	S <sub>14</sub>	S <sub>21</sub>
E1	0		0	0
E2	0		0	1

E3	0	0	0
E4	0	0	0
E5	0	1	0
E6	0	0	0
E7	0	0	0
E8	0	0	1
E9	0	0	1
E10	0	0	1
E11	0	0	1
E12	0	1	1
E13	0	0	1
E14	0	1	0
E15	1	1	1
E16	0	0	0
E17	0	0	0
E18	1	1	1
E19	0	1	0
E20	0	0	1
E21	0	0	0
E22	0	0	1
E23	0	0	1
E24	0	1	1
E25	0	0	0
E26	0	0	1
E27	0	0	1
E28	0	0	1

E29	0	0	1
E30	1	1	1
E31	0	0	1
E32	0	0	1
E33	0	0	0
E34	0	0	1
<b>TOTAL</b>	<b>3</b>	<b>8</b>	<b>21</b>

**Gráfica 8. Resultado tabla 8 actividad 3 regla 6**



En este caso los estudiantes E15, E18 y E30 mencionaron que la regla estaba bien dibujada lo cual es un error, los demás estudiantes aciertan al expresar que la regla está mal dibujada, pero al igual que en las reglas anteriores, no dan una justificación apropiada; E2, E8, E9, E10, E11, E13, E20, E22, E23, E26, E27, E28, E29, E31, E32 y E34 tienen en cuenta que la regla no tiene una secuencia de números pero no se percatan de la ausencia del cero ( $S_{21}$ ); los estudiantes E5, E14, E19

consideran la ausencia del cero, pero no notan la secuencia de números ( $S_{14}$ ). Finalmente, E12, E15, E18, E24, E30 no tienen en cuenta la ausencia del cero ni la secuencia de números.

### Ilustración 8. Respuestas estudiantes E15 y E30 actividad 3 regla 6

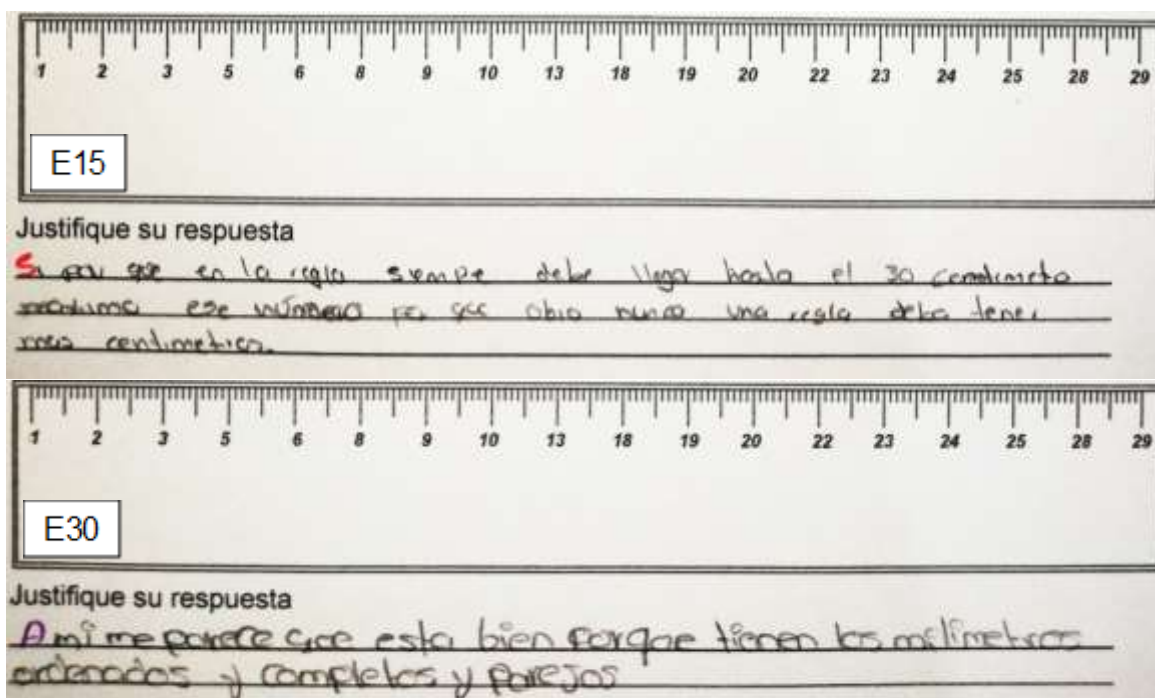


Tabla 9. Resultados actividad 3 regla 7

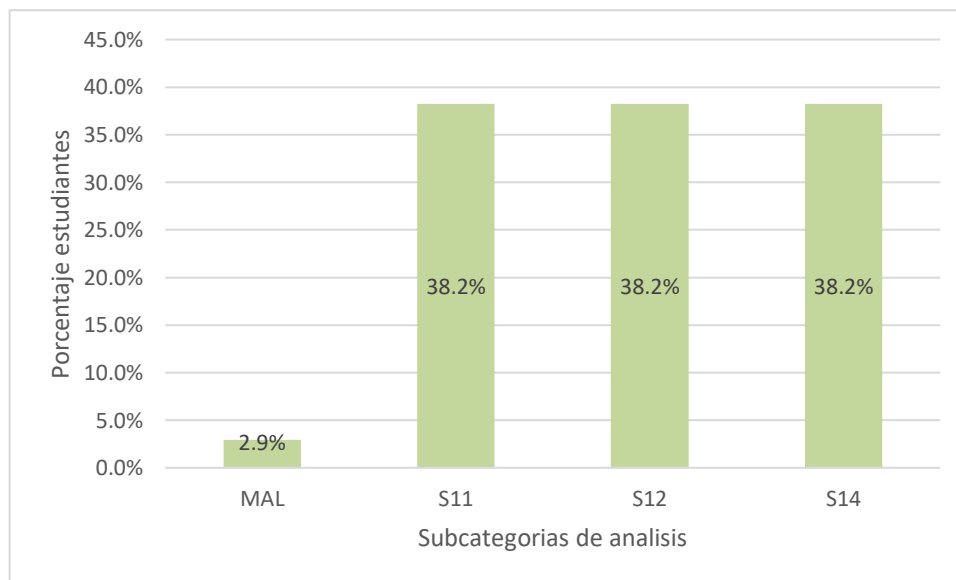
ACTIVIDAD 3					
REGLA 7					
ESTUDIANTE	RESPUESTA		C1		
	BIEN	MAL	$S_{11}$	$S_{12}$	$S_{14}$
E1	0		0	0	0
E2	0		0	0	0



E3	0	1	1	0
E4	0	1	1	0
E5	0	1	1	0
E6	0	1	1	0
E7	0	1	1	0
E8	0	0	0	1
E9	0	0	0	1
E10	0	0	0	1
E11	0	0	0	1
E12	0	0	0	1
E13	0	0	0	0
E14	1	1	1	1
E15	0	1	1	0
E16	0	1	1	0
E17	0	0	0	0
E18	0	1	1	1
E19	0	0	0	1
E20	0	0	0	0
E21	0	0	0	1
E22	0	0	0	1
E23	0	0	0	0
E24	0	1	1	1
E25	0	0	0	0
E26	0	0	0	0
E27	0	1	1	0
E28	0	1	1	0

E29	0	0	0	1
E30	0	0	0	0
E31	0	1	1	0
E32	0	0	0	1
E33	0	0	0	0
E34	0	0	0	0
<b>TOTAL</b>	<b>1</b>	<b>13</b>	<b>13</b>	<b>13</b>

**Gráfica 9. Resultado tabla 9 actividad 3 regla 7**



En esta situación solo un estudiante E14 responde que la regla está bien dibujada, lo cual es un error, por tanto, no identifica los espacios al escribir los números (S<sub>11</sub>) no reconoce la unidad (S<sub>12</sub>) y tiene dificultad al establecer la secuencia de números en la regla (S<sub>14</sub>); de igual forma E18 y E24 mantienen las mismas dificultades que el estudiante mencionado anteriormente, aunque ellos dijeron que la regla estaba mal, no justifican su respuesta. Los demás estudiantes señalan que la regla está

mal dibujada pero sus justificaciones carecen de sentido, es el caso de E3, E4, E5, E6, E7, E15, E16, E27, E28 y E31 que no indican nada acerca de los espacios al escribir los números ( $S_{11}$ ), ni de la unidad centímetro ( $S_{12}$ ), solo tuvieron en cuenta la secuencia de los números; Por su parte los estudiantes E8, E9, E10, E11, E12, E19, E21, E22, E29 y E32 tienen dificultades en establecer una secuencia en los números ( $S_{14}$ ), sin embargo reconocen los espacios al escribir los números y la unidad centímetro.

#### Ilustración 9. Respuestas estudiantes E14 y E18 actividad 3 regla 7

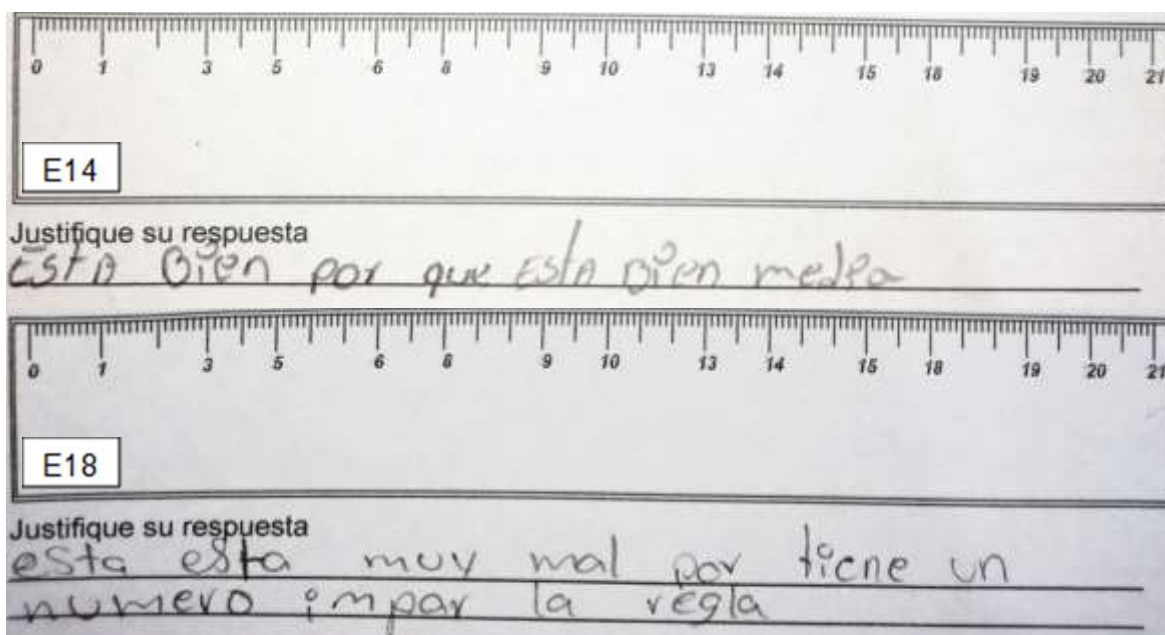


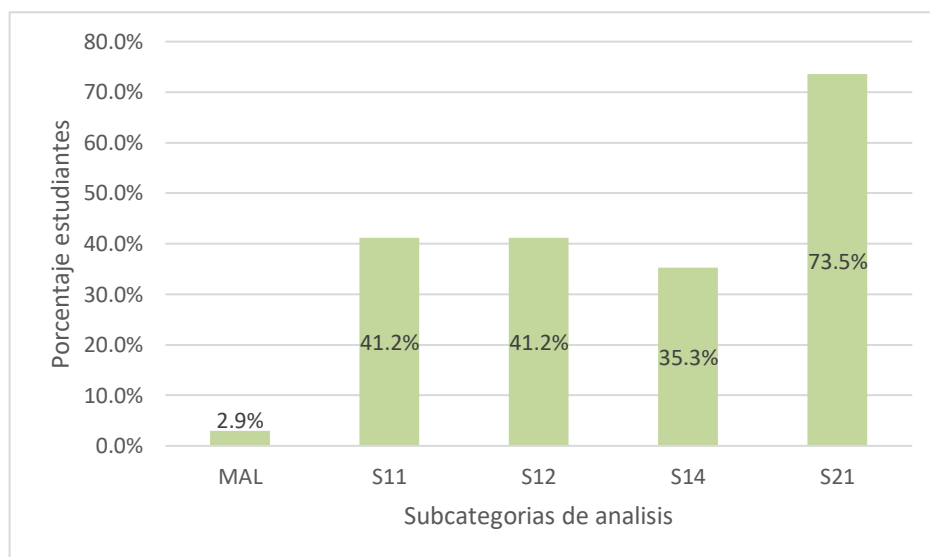
Tabla 10. Resultados actividad 3 regla 8

ACTIVIDAD 3						
REGLA 8						
ESTUDIANTE	RESPUESTA		C1		C2	
	BIEN	MAL	$S_{11}$	$S_{12}$	$S_{14}$	$S_{21}$

E1	0	0	0	0	1
E2	0	0	0	0	1
E3	0	1	1	0	0
E4	0	1	1	0	0
E5	0	1	1	0	0
E6	0	1	1	0	0
E7	0	1	1	0	0
E8	0	0	0	1	1
E9	0	1	1	0	1
E10	0	0	0	1	1
E11	0	0	0	0	1
E12	0	0	0	1	1
E13	0	0	0	1	0
E14	0	1	1	1	0
E15	0	1	1	0	1
E16	0	1	1	0	1
E17	0	0	0	0	1
E18	0	1	1	1	1
E19	0	0	0	1	0
E20	0	0	0	0	1
E21	0	0	0	1	0
E22	0	0	0	0	1
E23	0	0	0	0	1
E24	0	1	1	1	1
E25	0	0	0	0	1
E26	0	0	0	1	1

E27	0	0	0	0	1
E28	1	1	1	1	1
E29	0	0	0	1	1
E30	0	0	0	0	1
E31	0	1	1	0	1
E32	0	1	1	0	1
E33	0	0	0	0	1
E34	0	0	0	0	1
<b>TOTAL</b>	<b>1</b>	<b>14</b>	<b>14</b>	<b>12</b>	<b>25</b>

**Gráfica 10. Resultado tabla 10 actividad 3 regla 8**



En este caso solo el estudiante E28 responde que la regla está bien dibujada lo cual es un error, equivocándose en las cuatro categorías de análisis que se establecieron para esta actividad, Por su parte E18 y E24 respondieron acertadamente, pero la justificación no determinaba si realmente los estudiantes conocen la estructura de una regla. Los estudiantes que se van a mencionar responder apropiadamente pero

su justificación no da razón de las cuatro categorías de análisis: los estudiantes E1, E2, E11, E17, E20, E22, E23, E25, E27, E30, E33 y E34 no le dan importancia al cero ( $S_{21}$ ); E13, E19 y E21 no tienen en cuenta la secuencia de los números ( $S_{14}$ ); E2, E4, E5, E6 y E7 no reconocen la unidad ( $S_{12}$ ) y tampoco tienen inconveniente que se escriban los números en espacios diferentes ( $S_{11}$ ); E8, E10, E12, E26 y E29 no mencionan nada acerca de la secuencia de los números en la regla ( $S_{14}$ ) y tampoco tienen en cuenta la ausencia del cero ( $S_{21}$ ); E14 no establece si los espacios entre números es acorde ( $S_{11}$ ), si la unidad centímetro es correcta ( $S_{12}$ ) y tampoco establece la secuencia de números ( $S_{14}$ ); finalmente los estudiantes E9, E15, E16, E31 y E32 no se percatan que se usaron espacios diferentes al escribir los números ( $S_{11}$ ), tampoco que la unidad centímetro no corresponde ( $S_{12}$ ) y que hay ausencia del cero ( $S_{21}$ ).

#### Ilustración 10. Respuestas estudiantes E18, E24 y E28 actividad 3 regla 8

The image shows three rulers, each with a handwritten student response. The rulers are marked from 1 to 21. The responses are as follows:

**E18**  
Justifique su respuesta  
no por que se repite mucho el 21 y esta mal ccha la regla.

**E24**  
Justifique su respuesta NO  
yo no justifico ni respuesta por que  
haci no por la regla

**E28**  
Justifique su respuesta  
si si por el conteo de centimetros

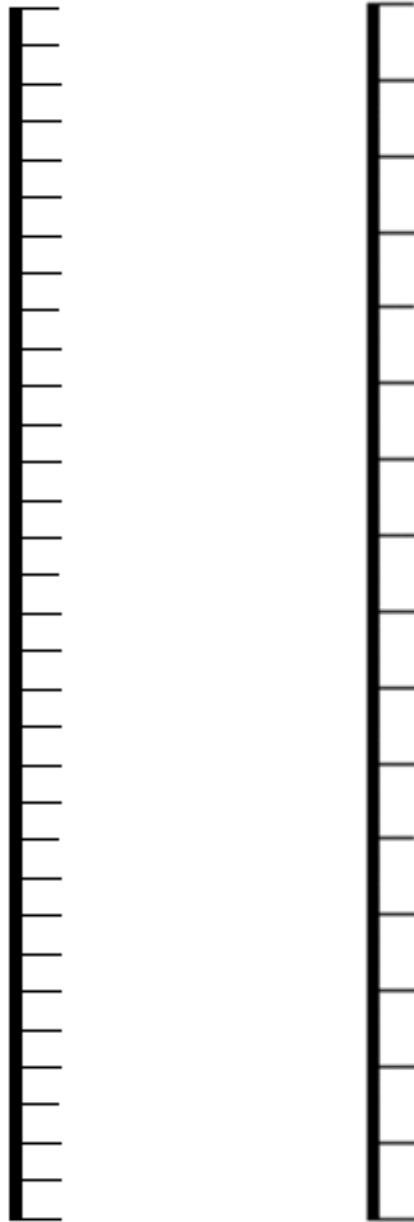
#### 3.4. ANÁLISIS ACTIVIDAD 4 (A4)

En la siguiente tarea se les entregó a los estudiantes el dibujo de dos segmentos de igual longitud uno de ellos con marcas en centímetros y el otro con marcas en medios centímetros con el propósito de determinar qué papel juega el número y el conteo al asignar una medida. Cabe anotar que esta actividad se basó en el trabajo realizado por Barrett, J; Jones, G; Thornton, C; Dickson, S<sup>57</sup>.

<sup>57</sup> BARRETT, Jeffrey E., et al. Understanding children's developing strategies and concepts for length. *Learning and teaching measurement*, 2003, p. 17-30

A4. El siguiente dibujo ilustra dos líneas con marcas en centímetros y medios centímetros. ¿Cuál de las dos líneas es más larga? Justifique su respuesta:

---



*Estas figuras se encuentran a escala (1:1) de la original.*



Las categorías que se analizaron en esta actividad son las siguientes:

C1. División y conservación de la unidad.

S<sub>13</sub> Secuencia de números sin relación entre espacios y marcas.

S<sub>14</sub> No establece una secuencia de números.

C4. Relación entre número y medición.

S<sub>41</sub> Cuenta marcas para emitir juicios de medición.

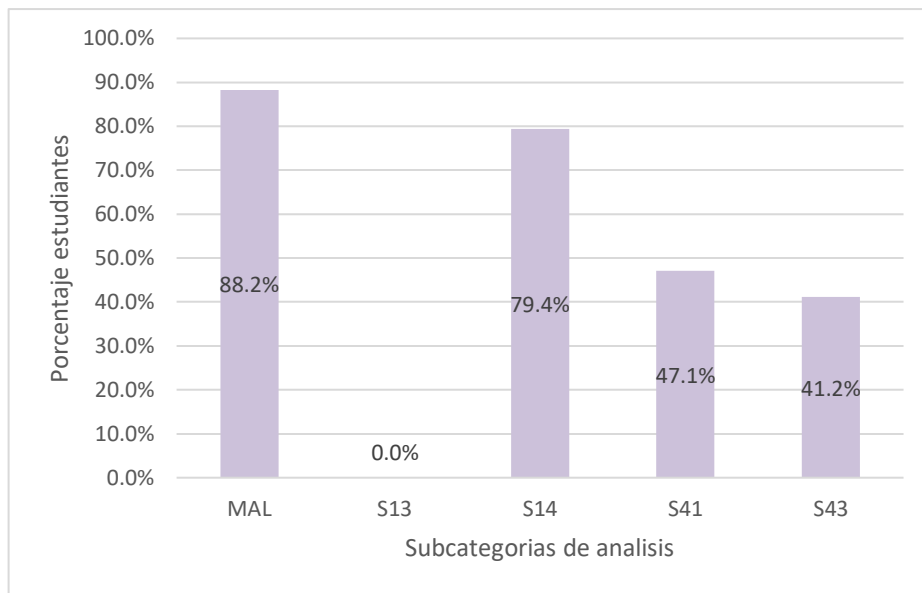
S<sub>43</sub> Asigna la medida más larga a segmentos divididos en unidades más grandes.

**Tabla 11. Resultados actividad 4**

ACTIVIDAD 4						
ESTUDIANTE	RESPUESTA		C1		C4	
	BIEN	MAL	S <sub>13</sub>	S <sub>14</sub>	S <sub>41</sub>	S <sub>43</sub>
E1	1		0	0	1	0
E2	1		0	1	1	0
E3	1		0	1	0	1
E4	1		0	0	1	0
E5	1		0	1	1	0
E6	1		0	1	1	0
E7	1		0	1	0	1
E8	0		0	1	0	0
E9	1		0	1	1	0
E10	1		0	1	0	1

E11	1	0	0	1	0
E12	1	0	1	0	1
E13	0	0	1	0	0
E14	1	0	1	0	1
E15	1	0	0	1	0
E16	1	0	1	1	0
E17	1	0	1	0	1
E18	1	0	1	1	0
E19	1	0	1	1	0
E20	1	0	1	1	0
E21	1	0	0	1	0
E22	1	0	1	0	1
E23	1	0	1	0	1
E24	1	0	1	1	0
E25	0	0	0	0	0
E26	1	0	1	0	1
E27	1	0	0	0	1
E28	1	0	1	0	1
E29	1	0	1	0	1
E30	1	0	1	1	0
E31	1	0	1	0	1
E32	0	0	1	0	0
E33	1	0	1	1	0
E34	1	0	1	0	1
<b>TOTAL</b>	<b>30</b>	<b>0</b>	<b>27</b>	<b>16</b>	<b>14</b>

**Gráfica 11. Resultado tabla 11 actividad 4**



Al comparar los estudiantes las dos líneas encontramos que 30 de ellos respondieron erróneamente a la pregunta ¿Cuál es más larga?, solamente E8, E13, E25 y E32 pudieron determinar que las líneas tenían la misma longitud. Adicionalmente solo los estudiantes E1, E4, E11, E15, E21, E25 y E27 enumeraron las marcas con una secuencia correcta de números, sin embargo, E4 y E27 comenzaron su secuencia desde uno, dándole importancia a las marcas y no a la unidad.

Continuando con el análisis de la actividad se logró establecer que los estudiantes E1, E2, E4, E5, E6, E9, E11, E15, E16, E18, E19, E20, E21, E24, E30 y E33 determinaron que la línea de la izquierda era más larga, porque tenía una proporción de marcas mayor que la otra línea, en otras palabras emitían juicios de medición basados en la cantidad de marcas (S<sub>41</sub>); por otro lado los estudiantes E3, E7, E10,


E12, E14, E17, E22, E23, E26, E27, E28, E29, E31 y E34 aseguraron que la línea de la derecha era más larga, porque sus espacios eran amplios comparados con la línea de la izquierda (S<sub>43</sub>). A unidades más grandes medidas más grandes.

#### Ilustración 11. Respuestas estudiantes E4, E6 y E7 actividad 4

El siguiente dibujo ilustra dos líneas con marcas en centímetros y medios centímetros. ¿Cuál de las dos líneas es más larga? Justifique su respuesta:

es mas grande la de la izquierda porque tiene mas centímetros que la de la derecha

E4



El siguiente dibujo ilustra dos líneas con marcas en centímetros y medios centímetros. ¿Cuál de las dos líneas es más larga? Justifique su respuesta:

la más larga es la primera de la izquierda por se le pasa por un poquito de espacio

E6

El siguiente dibujo ilustra dos líneas con marcas en centímetros y medios centímetros. ¿Cuál de las dos líneas es más larga? Justifique su respuesta:

la linea del lado derecho es mas grande por que tiene un centimetro completo y no tiene un centimetro medio como la del lado izquierdo

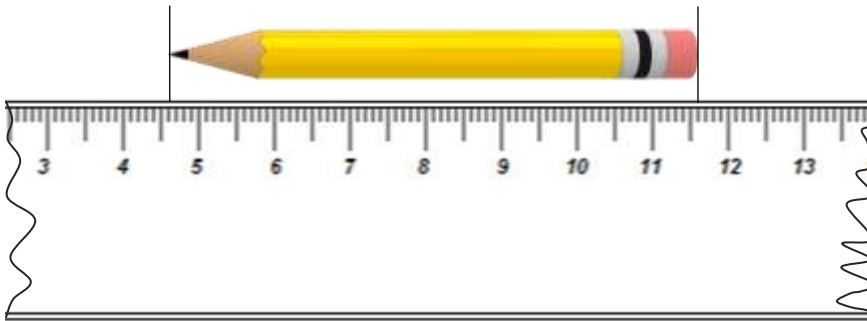
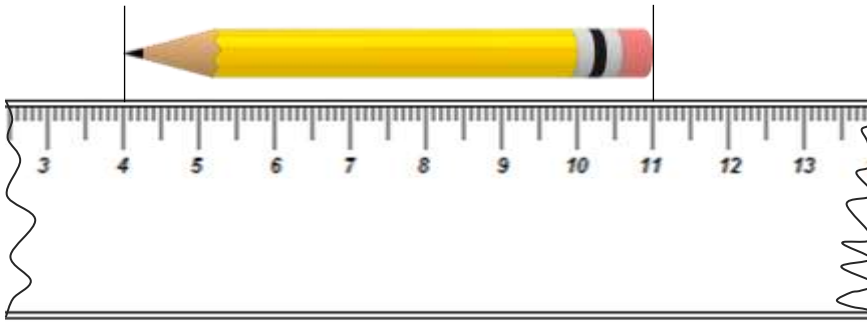
E7

#### 3.5. ANÁLISIS ACTIVIDAD 5 (A5)

La actividad consistió en solicitar a los estudiantes que midieran un lápiz dibujado en un papel, a partir de dos situaciones, En la primera, el lápiz comenzaba en 4 cm y finalizaba en 11 cm; en la segunda el lápiz iniciaba en 4,6 cm y terminaba en 11,6 cm. Cabe anotar que esta actividad se basó en el problema del palillo de grado 4 de

NAEP (National Center for Education Statistics, 2012) del trabajo realizado por Drake Michael, Learning to measure length. The problem with the school ruler, 2014.

*A5. Estas reglas de centímetros están rotas. Están midiendo un lápiz. ¿Cuánto mide el lápiz?*



¿Cómo lo resolviste?

*Estas figuras se encuentran a escala (1:1) de la original.*

Las categorías que se analizaron en esta actividad son las siguientes:

C3. Iteración de la unidad, transitividad y aditividad

S<sub>31</sub> No usa de la regla como objeto intercurrente (intermediario), como un referente por el cual se comparan longitudes de objetos.

S<sub>33</sub> No resta espacios sobrantes a las medidas.

C4. Relación entre número y medición.

S<sub>41</sub> Cuenta marcas para emitir juicios de medición.

S<sub>42</sub> Asigna el número de la marca inicial y final en la regla para indicar la longitud del objeto.

S<sub>44</sub> Número de la marca como medida en lugar de la cantidad espacio cubierto por el objeto.

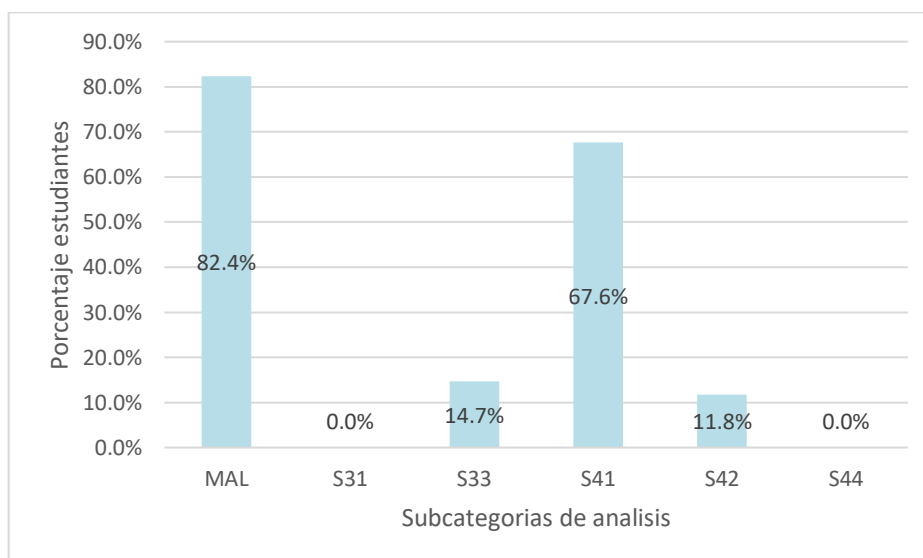
**Tabla 12. Resultados actividad 5 situación 1**

ACTIVIDAD 5							
SITUACIÓN 1							
ESTUDIANTE	RESPUESTA		C3		C4		
	BIEN	MAL	S <sub>31</sub>	S <sub>33</sub>	S <sub>41</sub>	S <sub>42</sub>	S <sub>44</sub>
E1	1		0	1	0	1	0
E2	0		0	0	0	0	0
E3	1		0	0	1	0	0

E4	1	0	1	0	1	0
E5	1	0	1	0	1	0
E6	1	0	0	1	0	0
E7	1	0	0	1	0	0
E8	1	0	0	1	0	0
E9	1	0	0	1	0	0
E10	1	0	0	1	0	0
E11	1	0	0	1	0	0
E12	1	0	0	1	0	0
E13	1	0	0	1	0	0
E14	0	0	0	0	0	0
E15	1	0	0	1	0	0
E16	1	0	0	1	0	0
E17	1	0	0	1	0	0
E18	1	0	0	1	0	0
E19	1	0	0	1	0	0
E20	1	0	0	1	0	0
E21	0	0	0	0	0	0
E22	1	0	0	1	0	0
E23	1	0	0	1	0	0
E24	1	0	0	1	0	0
E25	1	0	0	1	0	0
E26	1	0	1	0	0	0
E27	1	0	0	1	0	0
E28	1	0	1	0	1	0
E29	1	0	0	1	0	0

E30	1	0	0	1	0	0
E31	1	0	0	1	0	0
E32	0	0	0	0	0	0
E33	0	0	0	0	0	0
E34	0	0	0	0	0	0
<b>TOTAL</b>	<b>28</b>	<b>0</b>	<b>5</b>	<b>23</b>	<b>4</b>	<b>0</b>

**Gráfica 12. Resultados tabla 12 actividad 5 situación 1**



En la primera situación 28 estudiantes midieron mal el lápiz, cometiendo las siguientes equivocaciones: E1, E4, E5 y E28 asignan el número de la marca inicial y final en la regla para indicar la longitud del objeto (S<sub>42</sub>) y no restan espacios sobrantes a las medidas (S<sub>33</sub>), los estudiantes E3, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E13, E15, E16, E17, E18, E19, E20, E22, E23, E24, E25, E27, E29, E30 y E31 solo cuentan marcas para emitir juicios de medición (S<sub>41</sub>), y E26 no resta espacios sobrantes a las medidas (S<sub>33</sub>).



Ilustración 12. Respuestas estudiantes E22 y E28 actividad 5 situación 1

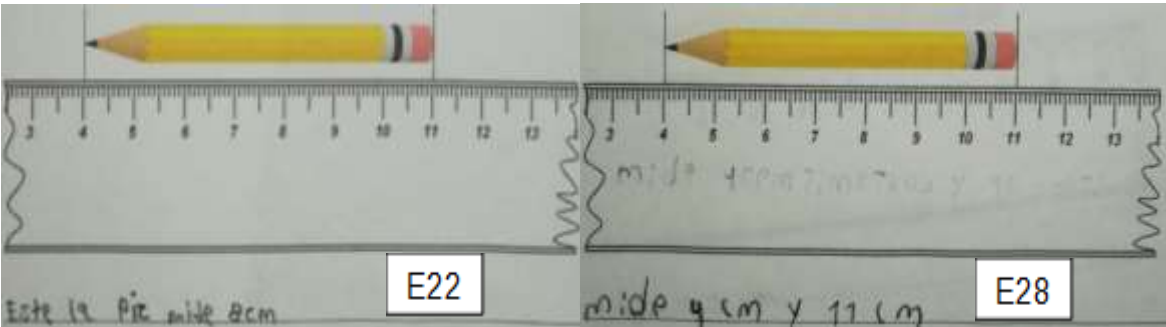


Ilustración 13. Respuesta estudiante E26 actividad 5 situación 1 y 2

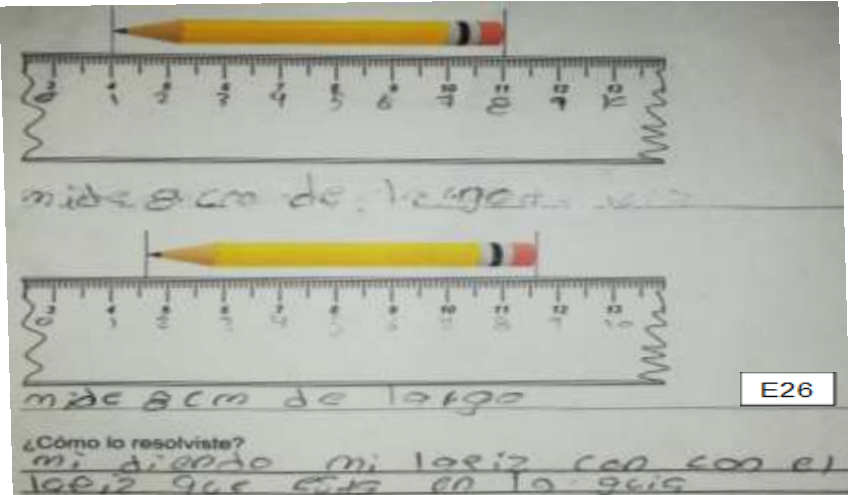


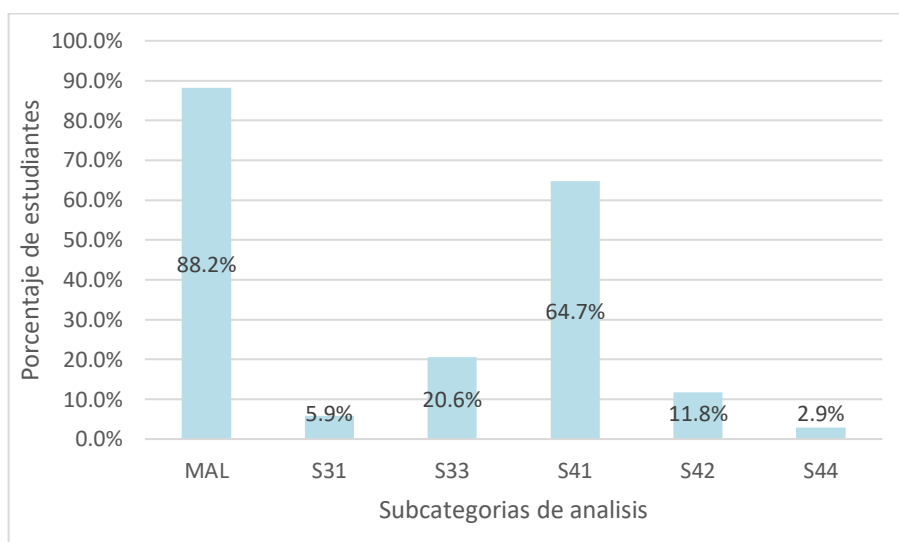
Tabla 13. Resultados tabla 13 actividad 5 situación 2

ACTIVIDAD 5							
SITUACIÓN 2							
ESTUDIANTE	RESPUESTA		C3		C4		
	BIEN	MAL	S <sub>31</sub>	S <sub>33</sub>	S <sub>41</sub>	S <sub>42</sub>	S <sub>44</sub>
E1	1		0	1	0	0	1
E2	1		0	1	0	0	0

E3	1	0	0	1	0	0
E4	1	0	1	0	1	0
E5	1	0	1	0	1	0
E6	1	0	1	0	1	0
E7	1	0	0	1	0	0
E8	1	0	0	1	0	0
E9	1	0	0	1	0	0
E10	1	0	0	1	0	0
E11	1	0	0	1	0	0
E12	1	0	0	1	0	0
E13	1	0	0	1	0	0
E14	0	0	0	0	0	0
E15	1	0	0	1	0	0
E16	1	0	0	1	0	0
E17	1	0	0	1	0	0
E18	1	1	0	0	0	0
E19	1	0	0	1	0	0
E20	1	0	0	1	0	0
E21	0	0	0	0	0	0
E22	1	0	0	1	0	0
E23	1	0	0	1	0	0
E24	1	0	0	1	0	0
E25	1	0	0	1	0	0
E26	1	1	0	0	0	0
E27	1	0	0	1	0	0
E28	1	0	1	0	1	0

E29	1	0	0	1	0	0
E30	1	0	0	1	0	0
E31	1	0	0	1	0	0
E32	1	0	0	1	0	0
E33	0	0	0	0	0	0
E34	0	0	0	0	0	0
<b>TOTAL</b>	<b>30</b>	<b>2</b>	<b>7</b>	<b>22</b>	<b>4</b>	<b>1</b>

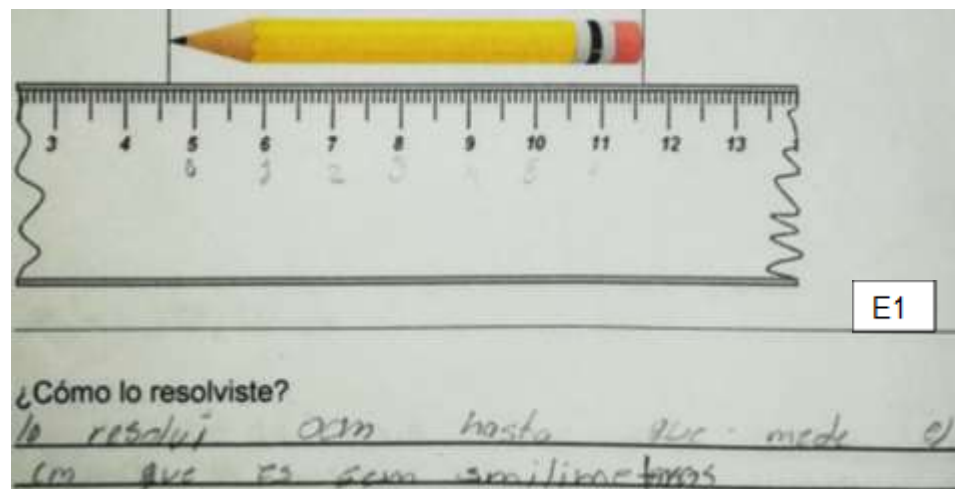
**Gráfica 13. Resultados actividad 5 situación 2**



Para esta situación 30 estudiantes se equivocan y no logran medir adecuadamente el lápiz, E18 y E26 no utilizan la regla como objeto intercurrente, simplemente compara los lápices utilizando sus dedos u otros instrumentos (S<sub>31</sub>); E2 logra establecer una medida, pero no tiene en cuenta que el lápiz inicia su medición sobre los milímetros (S<sub>33</sub>); E1 asignó la última marca de unidad y contó el resto de milímetros sobrantes para asignarle la medida al lápiz (S<sub>44</sub>) sin restarle el espacio que no cubre el lápiz sobre la regla (S<sub>33</sub>); E4, E5, E6 y E28 no restan espacios

sobrantes a las medidas ( $S_{33}$ ) y le asignan el número de la marca inicial y final en la regla para indicar la longitud del objeto ( $S_{42}$ ); por último los estudiantes E3, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E13, E15, E16, E17, E19, E20, E22, E23, E24, E25, E27, E29, E30, E31 y E32 cuentan marcas para emitir juicios de medición ( $S_{41}$ ) por tal razón le asignan la medida de 8cm al lápiz.

**Ilustración 14. Respuesta estudiante E1 actividad 5 situación 2**



**Ilustración 15. Respuesta estudiante E2 actividad 5 situación 2**

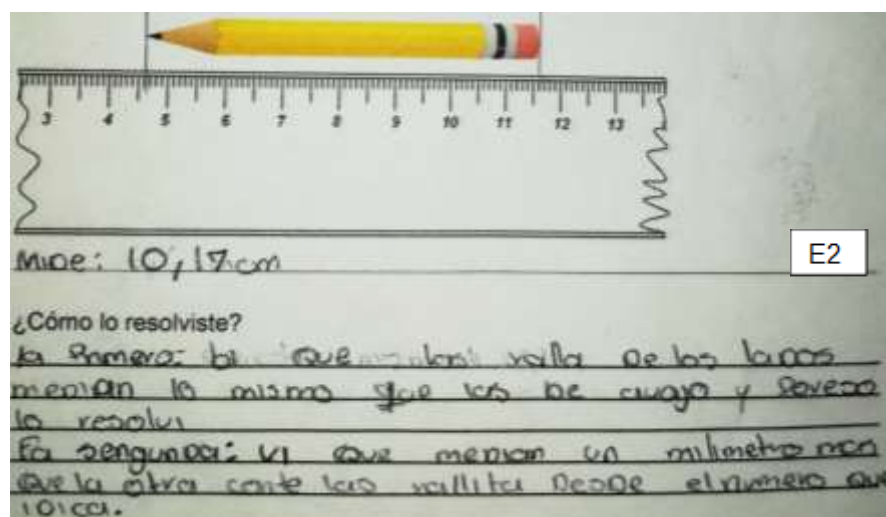


Ilustración 16. Respuesta estudiante E3 actividad 5 situación 2

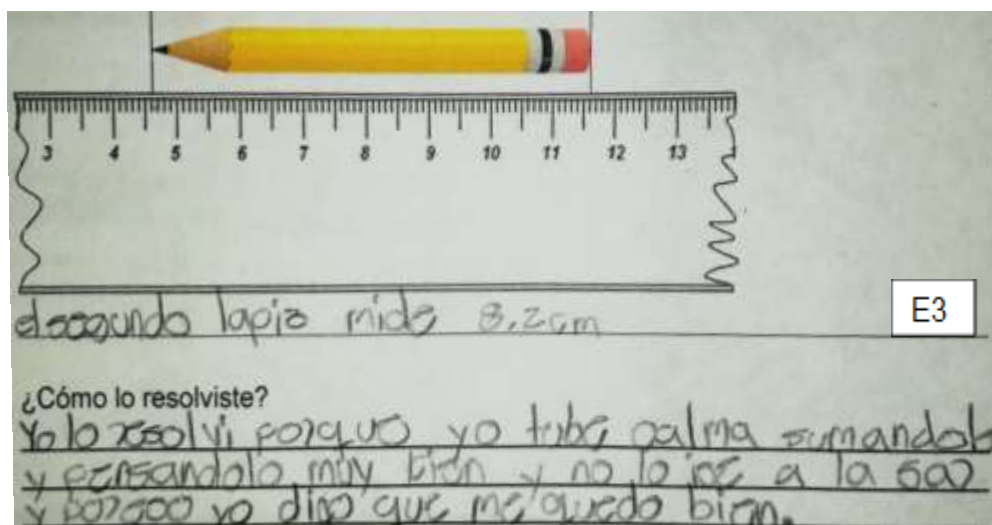
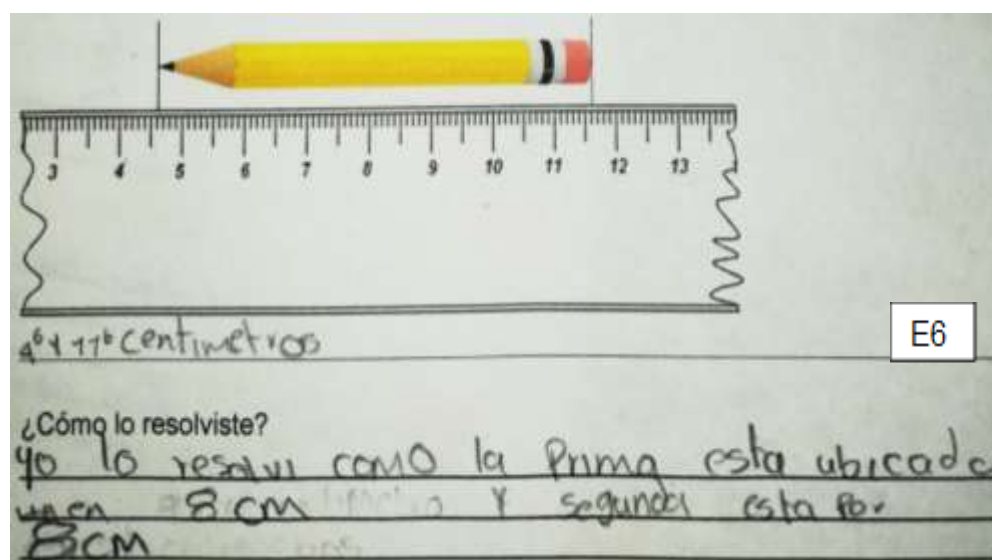
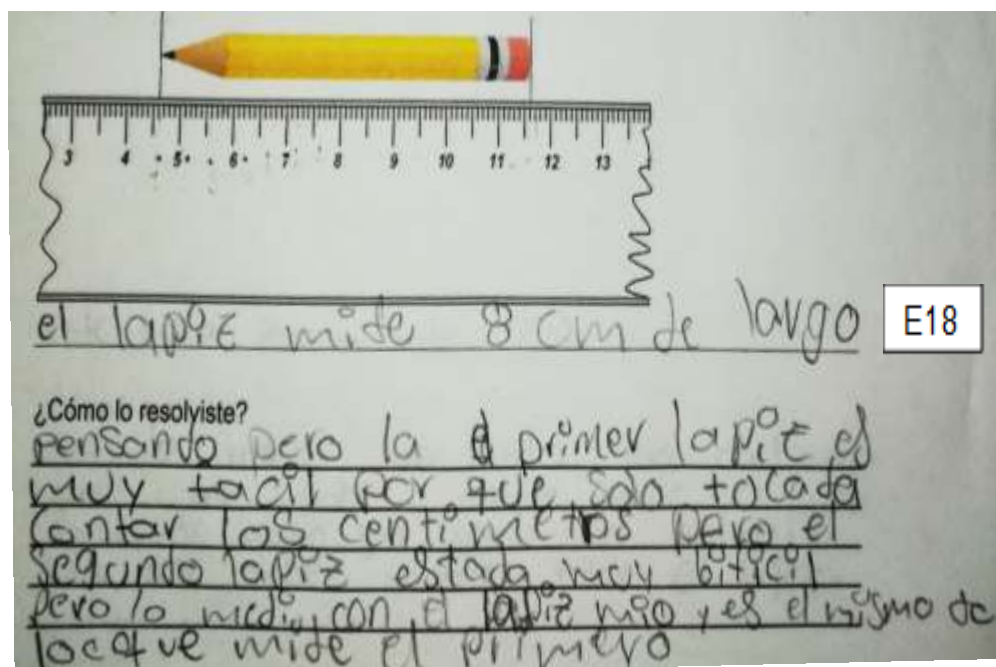


Ilustración 17. Respuesta estudiante E6 actividad 5 situación 2



### Ilustración 18. Respuesta estudiante E18 actividad 5 situación 2



#### 3.6. ANÁLISIS ACTIVIDAD 6 (A6)

Para desarrollar esta actividad se les solicitó a los estudiantes medir un borrador con dos reglas de distintos tamaños, las reglas solo tenían las marcas de los centímetros, medios centímetros y milímetros sin números y una de ellas estaba en condición de regla rota. El borrador tiene una medida 5 centímetros.

*A6 (recortar las siguientes reglas y el borrador)*

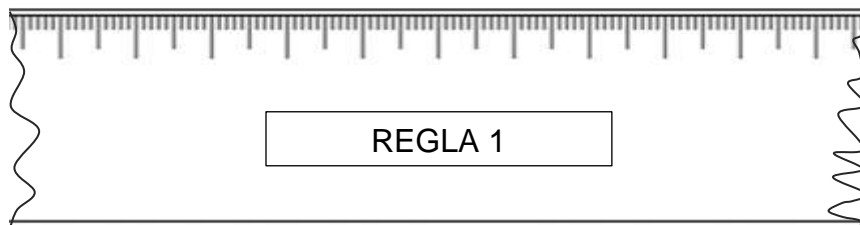
*Estas reglas miden en centímetros, pero no tiene números. ¿Cuánto mide el borrador?*

Regla 1: \_\_\_\_\_

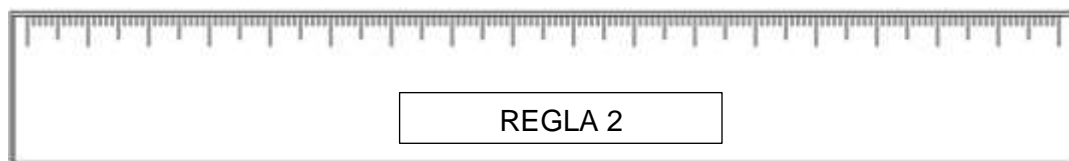
Regla 2: \_\_\_\_\_

¿Cómo lo resolviste?

\_\_\_\_\_



*Esta figura se encuentra a escala (1:1) de la original.*



*Esta figura se encuentra a escala (1:1,24) de la original.*



*Esta figura se encuentra a escala (1:1) de la original.*

Las categorías que se analizaron en esta actividad son las siguientes:

C1. División y conservación de la unidad.

S<sub>11</sub> Usa espacios diferentes al escribir números.

S<sub>12</sub> No reconoce la unidad centímetro ni su subdivisión.

S<sub>16</sub> Ausencia de números en la regla.

C2. Ausencia del cero.

S<sub>21</sub> Empieza la secuencia en 1.

C3. Iteración de la unidad, transitividad y aditividad.

S<sub>33</sub> No resta espacios sobrantes a las medidas.

C4. Relación entre número y medición.

S<sub>41</sub> Cuenta marcas para emitir juicios de medición.

S<sub>42</sub> Asigna el número de la marca inicial y final en la regla para indicar la longitud del objeto.

S<sub>44</sub> Número de la marca como medida en lugar de la cantidad espacio cubierto por el objeto.

**Tabla 14. Resultado actividad 6 regla 1 y 2**

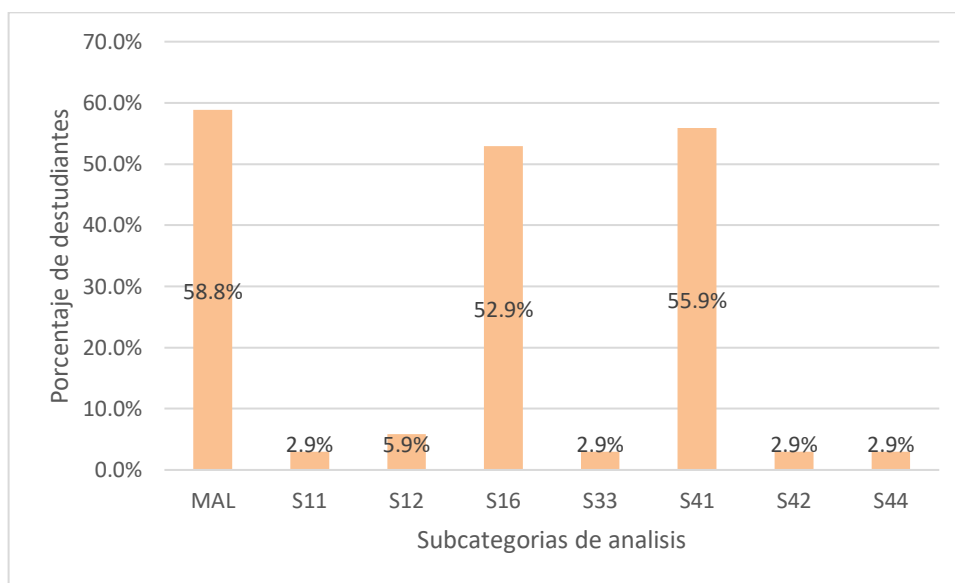
ACTIVIDAD 6									
REGLA 1 Y 2									
ESTUDIANTE	RESPUESTA		C1			C3	C4		
	BIEN	MAL	S <sub>11</sub>	S <sub>12</sub>	S <sub>16</sub>	S <sub>33</sub>	S <sub>41</sub>	S <sub>42</sub>	S <sub>44</sub>
E1	1		0	0	1	0	1	0	0



E2	1	0	0	0	1	1	0	0
E3	1	0	0	1	0	1	0	0
E4	1	1	1	0	0	1	0	0
E5	1	0	0	0	0	0	1	0
E6	0	0	0	0	0	0	0	0
E7	0	0	0	0	0	0	0	0
E8	0	0	0	1	0	0	0	0
E9	1	0	0	0	0	0	0	1
E10	1	0	0	1	0	1	0	0
E11	0	0	0	0	0	0	0	0
E12	0	0	0	1	0	0	0	0
E13	0	0	0	0	0	0	0	0
E14	0	0	0	0	0	0	0	0
E15	1	0	0	1	0	1	0	0
E16	1	0	0	1	0	1	0	0
E17	1	0	0	1	0	1	0	0
E18	1	0	0	1	0	1	0	0
E19	0	0	0	0	0	0	0	0
E20	1	0	0	1	0	1	0	0
E21	0	0	0	0	0	0	0	0
E22	1	0	1	1	0	1	0	0
E23	1	0	0	1	0	1	0	0
E24	0	0	0	0	0	0	0	0
E25	0	0	0	0	0	0	0	0
E26	1	0	0	1	0	1	0	0
E27	1	0	0	1	0	1	0	0

E28	1	0	0	0	0	1	0	0
E29	0	0	0	1	0	0	0	0
E30	1	0	0	1	0	1	0	0
E31	1	0	0	1	0	1	0	0
E32	1	0	0	1	0	1	0	0
E33	0	0	0	0	0	0	0	0
E34	0	0	0	0	0	0	0	0
<b>TOTAL</b>	<b>20</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>18</b>	<b>1</b>	<b>19</b>	<b>1</b>	<b>1</b>

**Gráfica 14. Resultado actividad 6 regla 1 y 2**



Para esta actividad 20 estudiantes tienen dificultades para medir el borrador con las reglas sin números, E1, E3, E10, E15, E16, E17, E18, E20, E23, E26, E27, E30, E31 y E32 no ubican números en las reglas ( $S_{16}$ ) y utilizan el conteo de marcas para emitir juicios de medición ( $S_{41}$ ); E5 asigna el número de la marca inicial y final en la regla para indicar la longitud del objeto ( $S_{42}$ ); E9 utiliza el número de la marca como medida en lugar de la cantidad espacio cubierto por el objeto ( $S_{44}$ ); E28 y E2 cuenta

marcas para asignarle una medida al borrador (S<sub>41</sub>), adicionalmente E2 no resta los espacios sobrantes a las medidas (S<sub>33</sub>); E4 usa espacios diferentes al escribir números (S<sub>11</sub>) no reconoce la unidad centímetro ni su subdivisión (S<sub>12</sub>) y cuenta marcas para emitir juicios de medición (S<sub>41</sub>); E22 en la regla 1 no reconoce la unidad (S<sub>12</sub>) y en la regla 2 no escribe números en misma (S<sub>16</sub>), él emite juicios de medición mediante el conteo de marcas (S<sub>41</sub>); por último los estudiantes E8, E12 y E29 logran medir adecuadamente el borrador pero hay ausencia de números en la regla (S<sub>16</sub>).

### Ilustración 19. Respuestas estudiantes E1, E2 y E4 actividad 6

Estas reglas miden en centímetros pero no tiene números. ¿Cuánto mide el borrador?

Regla 1: 6cm

Regla 2: 11cm

E1

¿Cómo lo resolviste?

ubicar el cero con el cuerno mide el borrador y medir el resultado también en la segunda. un corchero el borrador en la regla 1 y 2 saber cuánto mide el borrador

Estas reglas miden en centímetros pero no tiene números. ¿Cuánto mide el borrador?

Regla 1: mide 4cm y 3 milímetros

Regla 2: mide 5cm y 4 milímetros

E2

¿Cómo lo resolviste?

medi el borrador con las reglas y mido los números

Estas reglas miden en centímetros pero no tiene números. ¿Cuánto mide el borrador?

Regla 1: mide 10cm

Regla 2: mide 11cm

E4

¿Cómo lo resolviste?

lo resolví ubicando el borrador en las reglas y de la medida me dieron los resultados

## Ilustración 20. Respuestas estudiantes E5 y E9 actividad 6

Estas reglas miden en centímetros pero no tiene números. ¿Cuánto mide el borrador?

Regla 1: mide a 1/2 y 1/2 metro (m)

Regla 2: mide a 1/2 y 1/2 cm

E5

¿Cómo lo resolviste?

Yo le solv. con la regla. Por que  
para medir el borrador con la regla  
1, 2 para cada medio. Si cm el  
borrador cuanto divide

Estas reglas miden en centímetros pero no tiene números. ¿Cuánto mide el borrador?

Regla 1: el borrador mide 7 cm

Regla 2: el borrador mide 7 cm

E9

¿Cómo lo resolviste?

Puse el borrador en las reglas y mire los  
cm

## Ilustración 21. Respuestas estudiantes E22 y E28 actividad 6

Estas reglas miden en centímetros pero no tiene números. ¿Cuánto mide el borrador?

Regla 1: 74 cm

Regla 2: 6 cm

E22

¿Cómo lo resolviste?

conte los centímetros y los puse en la mente y Raconte el  
resultado.

Estas reglas miden en centímetros pero no tiene números. ¿Cuánto mide el borrador?

Regla 1: uno con 5 y medio

Regla 2: uno con 5 y medio

E28

¿Cómo lo resolviste?

por sonda y Teniendo paciencia

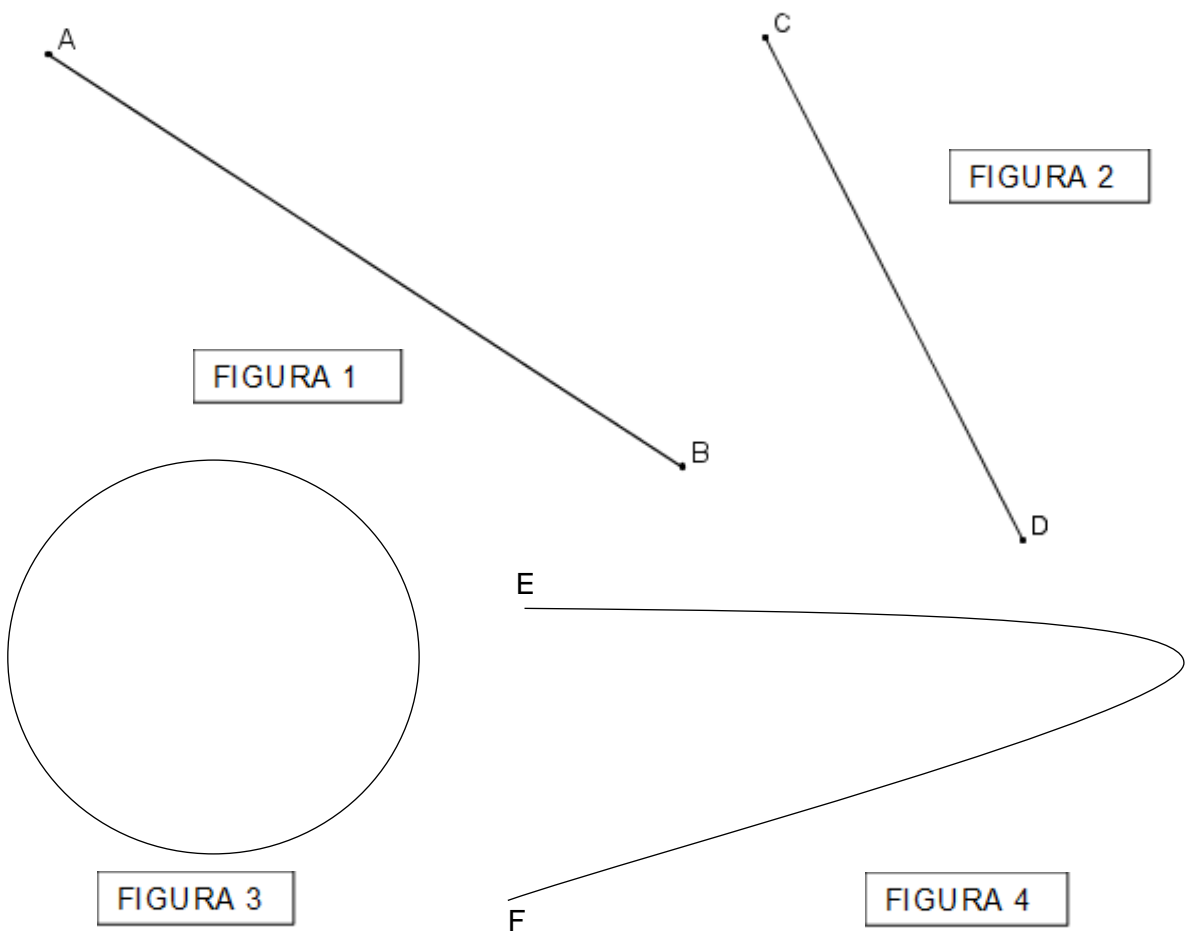
## ANÁLISIS ACTIVIDAD 7 (A7)

El objetivo de esta actividad es determinar cómo los estudiantes usan la regla en tareas de medida bajo tres condiciones; la primera en condición de regla rota; la segunda en condición de regla normal y la tercera en condición de regla flexible.

La actividad consistía en medir dos segmentos de recta, una línea curva y una línea cerrada (circunferencia); cada una de ellas medía 10,3cm; 7,6cm; 18,5cm y 17 centímetros respectivamente. Para el análisis se tuvo en cuenta tres aspectos fundamentales: cómo usan la regla, cómo miden segmentos y por último cómo miden líneas curvas.

*A7: con diferentes situaciones de regla:*

*Mida y determine ¿cuál de las siguientes líneas es más larga con base en el instrumento proporcionado? Escriba las medidas con las diferentes reglas en la tabla.*



*Estas figuras se encuentran a escala (1:1) de la original.*

	FIGURA 1	FIGURA 2	FIGURA 3	FIGURA 4
REGLA ROTA				
REGLA RIGIDA				
REGLA FLEXIBLE				

Las categorías que se analizaron en esta actividad son las siguientes:

C3. Iteración de la unidad, transitividad y aditividad.

S<sub>31</sub> No usa de la regla como objeto intercurrente (intermediario), como un referente por el cual se comparan longitudes de objetos.

S<sub>32</sub> No suma espacios faltantes a las medidas.

S<sub>33</sub> No resta espacios sobrantes a las medidas.

C4. Relación entre número y medición.

S<sub>41</sub> Cuenta marcas para emitir juicios de medición.

S<sub>42</sub> Asigna el número de la marca inicial y final en la regla para indicar la longitud del objeto.

S<sub>43</sub> Asigna la medida más larga a segmentos divididos en unidades más grandes.

S<sub>44</sub> Número de la marca como medida en lugar de la cantidad espacio cubierto por el objeto.

C5. Longitud y distancia.

S<sub>51</sub> Mide la distancia del punto inicial y final de una línea curva y no su longitud.

S<sub>52</sub> Afirma que la longitud de una línea curva no se puede medir.

S<sub>53</sub> Linealiza las curvas.

S<sub>54</sub> Confunde la longitud de una línea curva cerrada, con la medida del diámetro.

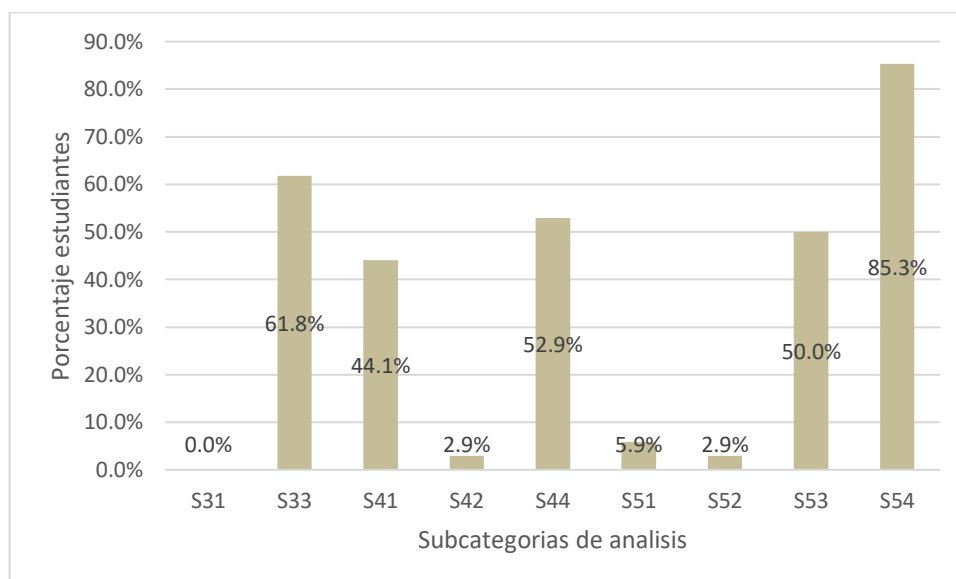
**Tabla 15. Resultado actividad 7 regla rota**

ACTIVIDAD 7													
REGLA ROTA													
ESTUDIANT E	RESPUESTA				C3		C4			C5			
	F1 10CM	F2 7CM	F3 17CM	F4 18CM	S <sub>3</sub> 1	S <sub>3</sub> 3	S <sub>4</sub> 1	S <sub>4</sub> 2	S <sub>4</sub> 4	S <sub>5</sub> 1	S <sub>5</sub> 2	S <sub>5</sub> 3	S <sub>5</sub> 4
E1	10,5	8	5,4	9,1	0	1	1	0	0	0	0	1	1
E2	11	8,5	5,8	9,5	0	0	1	0	0	0	0	1	1
E3	12	9	6	10	0	1	1	0	1	0	0	1	1
E4	13,5	10,8	8,6	12,2	0	1	0	0	1	0	0	1	1
E5	14	11,5	9	13,5	0	1	0	0	1	0	0	1	1
E6	4,7	3,1	2,4		0	1	0	1	0	0	1	0	1
E7	11	11,5	13	21,5	0	1	1	0	1	0	0	0	1
E8	10,5	8	6	12	0	0	1	0	0	0	0	1	1
E9	11	8	17	14,5	0	1	1	0	0	0	0	0	0
E10	14	11,5	8	7	0	1	0	0	0	1	0	0	1

E11	10	7,5	5	9	0	0	0	0	0	0	0	1	1
E12	11	11,5	9,2	12,5	0	1	1	0	1	0	0	1	1
E13	10,1	7,5	15	17,13	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E14	10	7,4	9,5	13,5	0	1	0	0	1	0	0	1	1
E15	14	11,2	9,5	12,8	0	1	0	0	1	0	0	1	1
E16	10,5	8	25	19,5	0	0	1	0	0	0	0	0	1
E17	13,5	11	21	24	0	1	1	0	1	0	0	0	1
E18	8,5	8,5	6,5	19	0	1	1	0	0	0	0	0	1
E19	11	8	17	14,5	0	1	1	0	1	0	0	0	1
E20	10	7,5	16	13	0	0	0	0	0	0	0	1	0
E21	10	7,5	17,5	13	0	0	0	0	0	0	0	1	0
E22	14	16	9	13	0	1	0	0	1	0	0	1	1
E23	13,4	11	5,6	13	0	1	0	0	1	0	0	1	1
E24	10	7,5	8	18	0	0	0	0	0	0	0	0	1
E25	11	8	6	19	0	1	0	0	1	0	0	0	1
E26	11	8,3	6,5	10,5	0	1	0	0	1	0	0	1	1
E27	10	7,4	5	10	0	0	0	0	0	0	0	1	1
E28	10	8	5	4	0	0	0	0	0	1	0	0	1
E29	8,5	8,5	6,5	20	0	0	1	0	1	0	0	0	1
E30	11	8,5	19	22	0	0	1	0	1	0	0	0	0
E31	13,4	10,6	14,5	25,2	0	1	1	0	1	0	0	0	1
E32	11	8	6	23,5	0	1	1	0	1	0	0	0	1
E33	14	11,5	21	25	0	1	0	0	1	0	0	0	1
E34	10	7,6	5,2	9	0	0	0	0	0	0	0	1	1
<b>TOTAL</b>					0	<b>21</b>	<b>15</b>	<b>1</b>	<b>18</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>17</b>	<b>29</b>



**Gráfica 15. Resultados tabla 15 actividad 7 regla rota**



En esta actividad tan solo un estudiante logro medir apropiadamente las cuatro líneas, la complejidad de la actividad mostró que todos los estudiantes usan la regla como objeto intercurrente, aunque al medir, la mayoría no atiende el hecho de que la regla no comienza en cero y por esta razón no usan estrategias donde restan el faltante a la medida dada, como se puede observar en la respuesta de los estudiantes E1, E3, E4, E5, E6, E7, E9, E10, E12, E14, E15, E17, E18, E19, E22, E23, E25, E26, E31, E32 y E33 (S<sub>33</sub>); sólo colocan el número en el que coincide la regla y el segmento (S<sub>44</sub>) para los estudiantes E3, E4, E5, E7, E12, E14, E15, E17, E19, E22, E23, E25, E26, E29, E30, E31, E32 y E33, lo importante es que la regla cumpla con una secuencia numérica sin tener en cuenta que empieza desde el número cuatro; en el caso de los estudiantes E1, E2, E3, E7, E8, E9, E12, E16, E17, E18, E19, E29, E30, E31 y E32 atienden a las marcas y por ello las cuentan para establecer la medida de las líneas (S<sub>41</sub>); tan solo el estudiante E6 sigue cometiendo

el error de poner la marca inicial y final en la regla para dar la medida de las líneas (S<sub>42</sub>).

**Ilustración 22. Respuestas estudiantes E1, E3 y E10 actividad 7 regla rota**

E1	FIGURA 1	FIGURA 2	FIGURA 3	FIGURA 4
REGLA ROTA	10,5	8,0	5,4	9,1
E3	FIGURA 1	FIGURA 2	FIGURA 3	FIGURA 4
REGLA ROTA	12cm	9cm	6cm	10cm
E10	FIGURA 1	FIGURA 2	FIGURA 3	FIGURA 4
REGLA ROTA	14cm	11,4 medio	80ml	70 ml

**Ilustración 23. Procedimientos respuestas estudiante E16 actividad 7 regla rota**

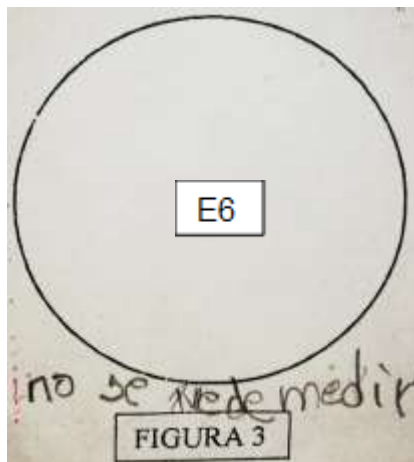
Handwritten calculations for student E16:

$$\begin{array}{r}
 105 \\
 - 8 \\
 \hline
 97 \\
 + 13 \\
 \hline
 110
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 19.5 \\
 \times 6.6 \\
 \hline
 117.3 \\
 + 117.3 \\
 \hline
 128.6
 \end{array}$$

En la medición de la línea curva E6 afirma que la longitud de una línea curva no se puede medir (S<sub>52</sub>), los estudiantes E10 y E28 establecen que su longitud se mide con la distancia desde el punto inicial hasta el final de dicha línea; por su parte E1, E2, E3, E4, E5, E8, E11, E12, E14, E15, E20, E21, E22, E23, E26, E27 y E34 linealizaron la curva para dar la medida (S<sub>53</sub>), lo cual conllevó a respuestas

incorrectas; y por último 29 estudiantes al medir la longitud de la línea circular, median era el diámetro y no su longitud ( $S_{54}$ ). Es de rescatar que la mayoría de los estudiantes cometieron más de un error en esta actividad.

**Ilustración 24. Respuesta estudiante E6 actividad 7 figura 3 regla rota**



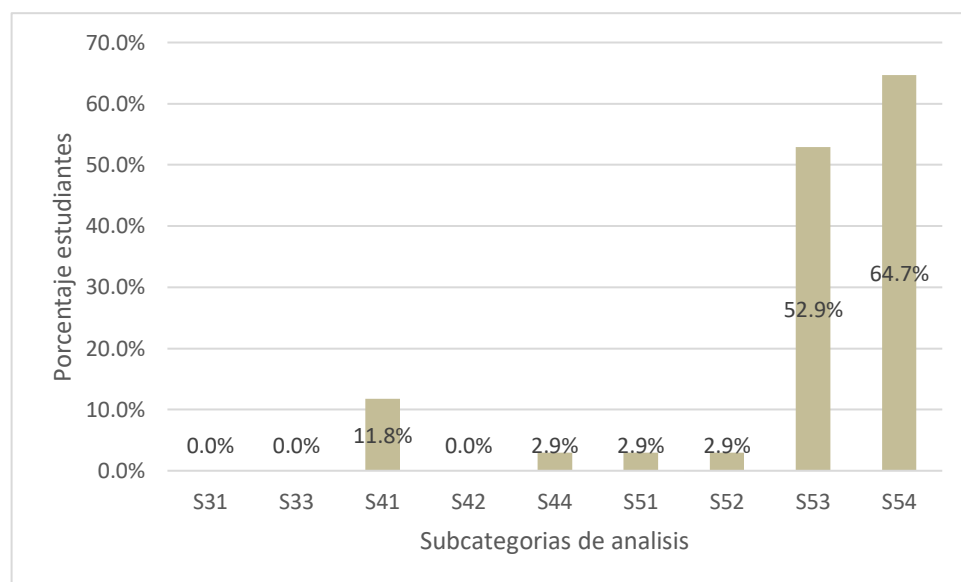
**Tabla 16. Resultado actividad 7 regla rígida**

ACTIVIDAD 7													
REGLA RIGIDA													
ESTUDIANT E	RESPUESTA				C3		C4			C5			
	F1 10CM	F2 7CM	F3 17CM	F4 18CM	S <sub>3</sub> 1	S <sub>3</sub> 3	S <sub>4</sub> 1	S <sub>4</sub> 2	S <sub>4</sub> 4	S <sub>5</sub> 1	S <sub>5</sub> 2	S <sub>5</sub> 3	S <sub>5</sub> 4
E1	10,2	7,1	5,5	8,8	0	0	0	0	0	0	0	1	1
E2	10	7,2	5,4	9	0	0	0	0	0	0	0	1	1
E3	10	7	5	8	0	0	0	0	0	0	0	1	1
E4	9,8	7,4	4,5	8,9	0	0	0	0	0	0	0	1	1

E5	10	7,5	5,4	9	0	0	0	0	0	0	0	1	1
E6	10	7,8	5,5		0	0	0	0	0	0	1	0	1
E7	10	7,5	18	21,5	0	0	0	0	0	0	0	1	0
E8	10	7,5	5	8,5	0	0	0	0	0	0	0	1	1
E9	11	8,5	17,5	14,5	0	0	1	0	0	0	0	0	0
E10	11	7,5	7	8	0	0	1	0	0	0	0	1	1
E11	10	7,5	5	9	0	0	0	0	0	0	0	1	1
E12	12	7,5	7	9	0	0	1	0	0	0	0	1	1
E13	10,2	7,5	16	17,13	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E14	10,2	7,5	5,5	8,5	0	0	0	0	0	0	0	1	1
E15	10	7,5	5	8,5	0	0	0	0	0	0	0	1	1
E16	10	7,5	5,6	18	0	0	0	0	0	0	0	0	1
E17	10	7,5	15	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E18	10	7,5	16	19	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E19	10	7,5	17	14,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E20	10	7,5	16	5,5	0	0	0	0	0	1	0	0	0
E21	10	7,5	17,5	17	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E22	10	12	5	14	0	0	0	0	1	0	0	1	1
E23	10	7,6	13	8,6	0	0	0	0	0	0	0	1	1
E24	10	7,5	8	18	0	0	0	0	0	0	0	0	1
E25	10	7	6	19	0	0	0	0	0	0	0	0	1
E26	11	8,5	6,5	10,5	0	0	1	0	0	0	0	1	1
E27	10	7,4	5	10	0	0	0	0	0	0	0	1	1
E28	10,2	7,2	5,3	9,9	0	0	0	0	0	0	0	1	1
E29	10	7,2	16	19	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E30	10	7,5	15	18	0	0	0	0	0	0	0	0	0

E31	10,2	7,3	14,5	18,4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E32	10	7,5	5,5	18,5	0	0	0	0	0	0	0	0	1
E33	10,1	7,5	15,5	19	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E34	10	7,6	5,2	9	0	0	0	0	0	0	0	1	1
<b>TOTAL</b>					0	0	4	0	1	1	1	18	22

**Gráfica 16. Resultados tabla 16 actividad 7 regla rígida**



En esta actividad todos los estudiantes usan la regla como objeto intercurrente, aunque al medir segmentos usan dos estrategias erróneas: la primera el conteo de líneas (S<sub>41</sub>), como se puede observar en la respuesta de E9, E10, E12 y E26, y colocar el número correspondiente a la marca en la regla, para el caso del estudiante E22; se pudo observar que es más fácil para ellos usar una regla regular, este instrumento permite no poner en juego el conocimiento que se tiene acerca de la unidad, tampoco cuestionan la colocación del cero, ni el número a la medida, cabe destacar que la mayoría de estudiantes logro medir correctamente las líneas

rectas; con respecto a la curva, E20 la mide tomando la distancia entre el punto inicial y el punto final de la misma, los estudiantes E1, E2, E3, E4, E5, E7, E8, E10, E11, E12, E14, E15, E22, E23, E26, E27, E28 y E34 linealizaron la línea curva para determinar su longitud ( $S_{53}$ ) y E6 mantiene su posición de que no se pueden medir las líneas curvas cuando se usan reglas rígidas.

Por último, E1, E2, E3, E4, E5, E6, E8, E10, E11, E12, E14, E15, E16, E22, E23, E24, E25, E26, E27, E28, E32 y E34 no logran determinar la longitud de la línea circular y en lugar de ella miden el diámetro ( $S_{54}$ ).

**Ilustración 25. Respuestas estudiantes E1, E3, E10, E24 y E28 actividad 7 regla rígida**

E1	REGLA RIGIDA	10,2	7,1	<del>8,8</del> 8,8
E3	REGLA RIGIDA	10cm	7cm	5cm 8cm
E10	REGLA RIGIDA	11cm	7 y medio	70mm 80mm
E24	REGLA RIGIDA	10 cm	7.5 cm	8 cm 18 cm
E28	REGLA RIGIDA	10,2	7,2	5,3 9,9

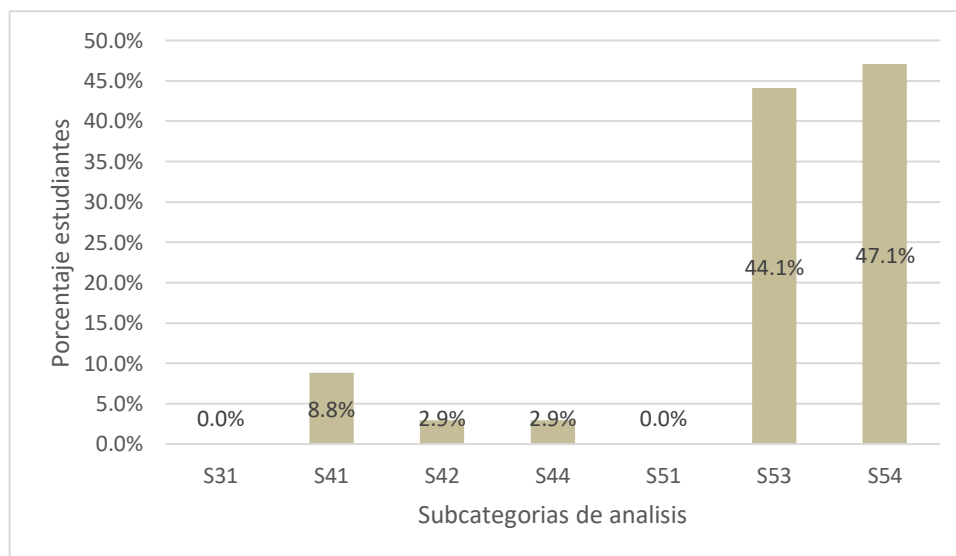
**Tabla 17. Resultado actividad 7 regla flexible**

ACTIVIDAD 7										
REGLA FLEXIBLE										
ESTUDIANTE	RESPUESTA				C3	C4			C5	
	F1 10CM	F2 7CM	F3 17CM	F4 18CM	S <sub>31</sub>	S <sub>41</sub>	S <sub>42</sub>	S <sub>44</sub>	S <sub>51</sub>	S <sub>53</sub> S <sub>54</sub>

E1	10,1	7,1	15	8,7	0	0	0	0	0	1	0
E2	10	7,5	5,4	9,5	0	0	0	0	0	1	1
E3	10	7	5	8	0	0	0	0	0	1	1
E4	10	7,4	5,5	8,5	0	0	0	0	0	1	1
E5	10,1	7,5	5,4	9	0	0	0	0	0	1	1
E6	3,14	9,1	4,5	15	0	0	1	0	0	0	1
E7	11	7,5	16,5	21,5	0	1	0	0	0	0	0
E8	10	7,5	5	8,5	0	0	0	0	0	1	1
E9	11	8,5	17,5	14,5	0	1	0	0	0	0	0
E10	10,1	7,5	15	18	0	0	0	0	0	0	0
E11	10	7,5	5,3	9	0	0	0	0	0	0	0
E12	10	7,5	5,2	9	0	0	0	0	0	1	1
E13	10,1	7,5	16	17,13	0	0	0	0	0	0	0
E14	10,2	7,5	5,5	8,6	0	0	0	0	0	1	1
E15	10	7,5	5,5	8,5	0	0	0	0	0	1	1
E16	10	7,5	5,6	17,9	0	0	0	0	0	1	0
E17	10	7,5	15	20	0	0	0	0	0	0	0
E18	10	7,5	17	19	0	0	0	0	0	0	0
E19	10	7,6	17,5	17	0	0	0	0	0	0	0
E20	10	7,6	16	16	0	0	0	0	0	0	0
E21	10	7,5	15	19,5	0	0	0	0	0	0	0
E22	11	12	16	19	0	1	0	1	0	0	0
E23	10	7,4	17	20	0	0	0	0	0	0	0
E24	10	7,5	10,2	17,5	0	0	0	0	0	0	1
E25	10	7	6	19	0	0	0	0	0	0	1
E26	11	8,5	6,5	10,5	0	0	0	0	0	1	1

E27	10	7,4	5	10	0	0	0	0	0	1	1
E28	10	7,5	5,4	9,5	0	0	0	0	0	1	1
E29	10	7	12	9	0	0	0	0	0	1	1
E30	10	7,5	16	16	0	0	0	0	0	0	0
E31	10,2	7,6	14,6	17	0	0	0	0	0	0	0
E32	10	7,5	5	18	0	0	0	0	0	0	0
E33	10	7,5	15,5	18,5	0	0	0	0	0	0	0
E34	10	7,6	5,2	9	0	0	0	0	0	1	1
<b>TOTAL</b>					0	3	1	1	0	15	16

**Gráfica 17. Resultados tabla 17 actividad 7 regla flexible**



Al comparar los resultados de la actividad anterior con esta actividad, encontramos que no hay diferencia significativa en las respuestas al usar regla normal y regla flexible; pero al medir curvas con la regla maleable los resultados fueron diferentes debido a que la regla permite bordear la frontera de la curva. Los estudiantes E7 y E9, (S<sub>41</sub>) continúan contando marcas para establecer la medida de las líneas; E6 le

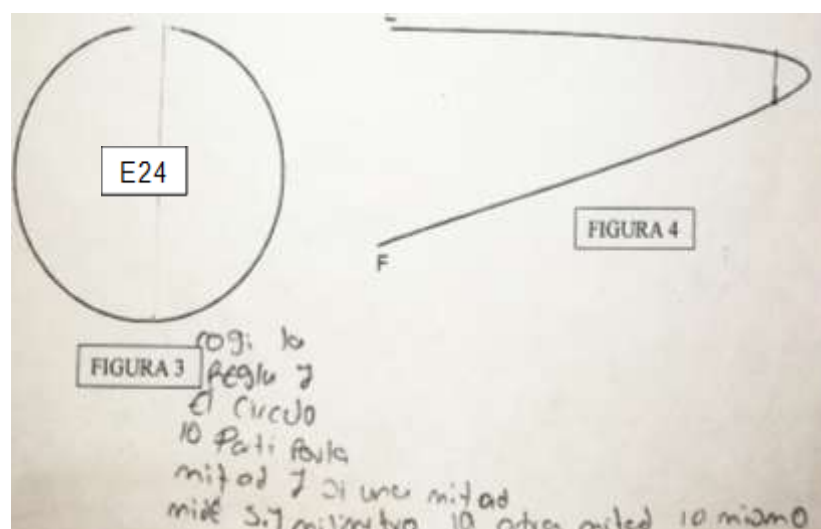


asigna el número de la marca inicial y final en la regla para indicar la longitud del objeto ( $S_{42}$ ). E22 utiliza el número de la marca como medida en lugar de la cantidad espacio cubierto por el objeto ( $S_{44}$ ). E1, E2, E3, E4, E5, E8, E12, E14, E15 E16, E26, E27, E28, E29 y E34 persisten en linealizar la línea curva ( $S_{53}$ ), sin tener en cuenta que la regla puede tomar la forma de la línea, aunque E6 logra medir la curva dando un valor aproximado de 15cm. Finalmente E2, E3, E4, E5, E6, E8, E12, E14, E15, E24, E25, E26, E27, E28, E29 y E34 miden el diámetro de la línea circular y no logran determinar su longitud ( $S_{54}$ ).

**Ilustración 26. Respuestas estudiantes E3, E24 y E28 actividad 7 flexible**

E3	REGLA FLEXIBLE	10 cm	7 cm	5 cm	8 cm
E24	REGLA FLEXIBLE	10 cm	7.5 cm	10.2 cm	17.5 cm
E28	REGLA FLEXIBLE	10	7:medio	5,4	9:medio

**Ilustración 27. Respuesta estudiante E24 actividad 7 figura 3 regla flexible**



### 3.7. ANÁLISIS ACTIVIDAD 8 (A8)

Esta actividad solicitaba a los estudiantes medir dos lápices de diferentes tamaños con una regla de 7cm, el primer lápiz tiene una longitud de 16cm y el segundo 6cm; la finalidad de la tarea es determinar qué acción toman los estudiantes cuando el instrumento de medida es más pequeño que el objeto a medir y cuando el objeto a medir es más largo que el instrumento, es decir, si suman espacios faltantes o si restan espacios sobrantes a las medidas.

#### ACTIVIDAD 8

*Utiliza la regla para medir los lápices. ¿Cuánto mide cada lápiz?*



*Esta figura se encuentra a escala (1:1,24) de la original.*

¿Cómo lo resolvió?

---

---

---



*Esta figura se encuentra a escala (1:1) de la original.*

¿Cómo lo resolvió?

---



---



---

Las categorías que se analizaron en esta actividad son las siguientes

C3. Iteración de la unidad, transitividad y aditividad.

S<sub>32</sub> No suma espacios faltantes a las medidas.

S<sub>33</sub> No resta espacios sobrantes a las medidas.

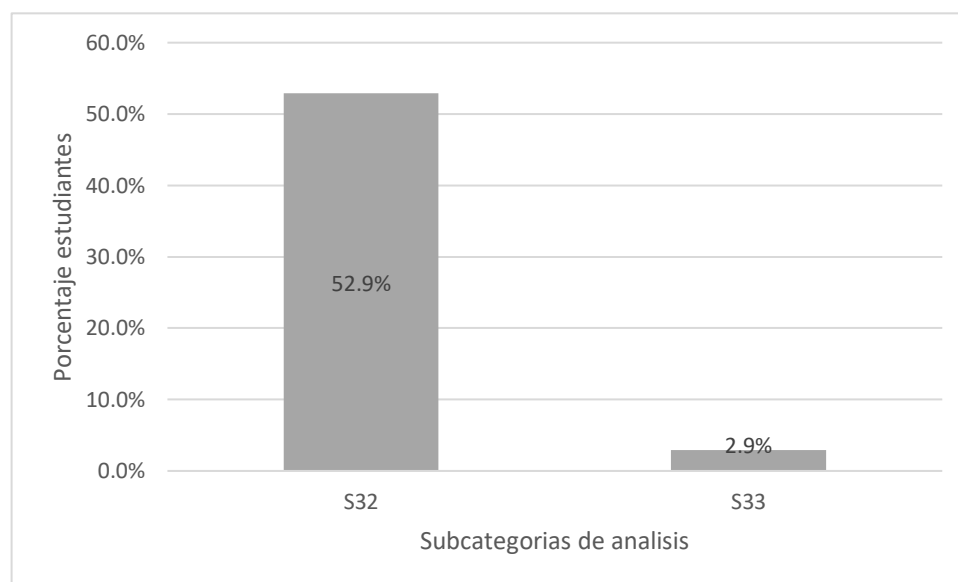
**Tabla 18. Resultado actividad 8**

ACTIVIDAD 8				
ESTUDIANTE	RESPUESTA		C3	
	F1 16CM	F2 6CM	S <sub>32</sub>	S <sub>33</sub>
E1	15,7	5,8	0	0
E2	16	6	0	0

E3	17	6	1	0
E4	14,1	6	1	0
E5	15	12	1	1
E6	15	6	1	0
E7	17	6	1	0
E8	15	6	1	0
E9	15	6	1	0
E10	17	6	1	0
E11	13	6	1	0
E12	16	6	0	0
E13	13	6	1	0
E14	16	6	0	0
E15	15	6	1	0
E16	15,8	6	0	0
E17	16	6	0	0
E18	16	6	0	0
E19	16	6	0	0
E20	25	6	1	0
E21	16	6	0	0
E22	15	6	1	0
E23	15	6	1	0
E24	16	6	0	0
E25	17	6	1	0
E26	17	6	1	0
E27	16	6	0	0
E28	15	6	1	0

E29	16	6	0	0
E30	16	6	0	0
E31	16	6	0	0
E32	15	6	1	0
E33	16	6	0	0
E34	16	6	0	0
<b>TOTAL</b>			<b>18</b>	<b>1</b>

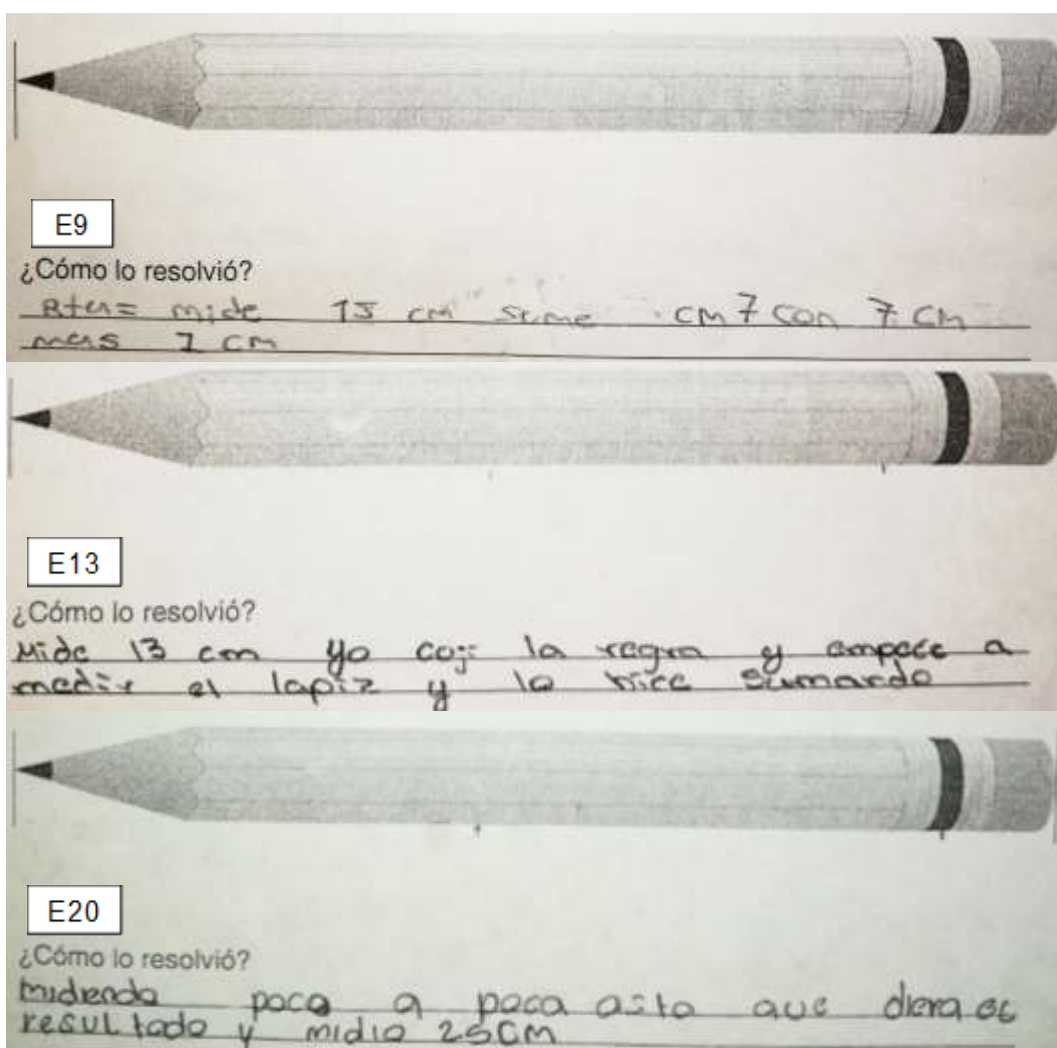
**Gráfica 18. Resultado tabla 18 actividad 8**



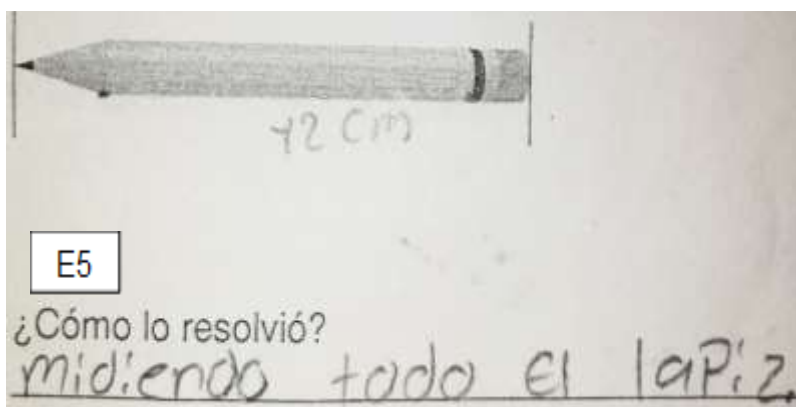
En esta actividad todos los estudiantes usaron la regla como objeto intercurrente y les asignaron medidas a los lápices. Se puede observar que se encuentra mayor dificultad al sumar espacios faltantes a las medidas ( $S_{32}$ ), es decir cuando el instrumento de medida es más corto que el objeto a medir; los estudiantes E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E13, E15, E20, E22, E23, E25, E26, E28 y E32 no sumaron adecuadamente y obtuvieron medidas de 13, 14.1, 15 y 17 cm,

E20 en particular dio una medida de 25cm siendo esta la más distante a la real; de lo cual se observa que tienen problema al ubicar la regla cuando están sumando o simplemente suman mal. Por su parte el estudiante E5 no resta espacios sobrantes a las medidas (S<sub>33</sub>) asignando la medida de 12cm al lápiz de 6cm.

**Ilustración 28. Respuestas estudiantes E9, E13 y E20 actividad 8 lápiz 1**



## Ilustración 29. Respuesta estudiante E5 actividad 8 lápiz 2



### 3.8. ANÁLISIS COMPARATIVO DE LOS ESTUDIANTES

En las siguientes tablas se analiza y comparan las respuestas de los estudiantes, a partir de las ocho actividades con sus categorías e indicadores, con el fin de interpretar y analizar sus respuestas, logrando así una mejor comprensión de los errores en los que incurren los estudiantes de quinto grado cuando usan la regla.

Actividad categoría por estudiante.

**Tabla 19. Resultados actividad 1 y 2 por estudiante**

	ACTIVIDAD 1									ACTIVIDAD 2									
Estudiante	Categoría 1					Categoría 2				Categoría 1						Categoría 2			Total
	S <sub>11</sub>	S <sub>1</sub> 2	S <sub>1</sub> 3	S <sub>1</sub> 4	S <sub>1</sub> 5	S <sub>2</sub> 1	S <sub>2</sub> 2	S <sub>2</sub> 3		S <sub>1</sub> 1	S <sub>1</sub> 2	S <sub>1</sub> 3	S <sub>1</sub> 4	S <sub>1</sub> 5	S <sub>1</sub> 6	S <sub>2</sub> 1	S <sub>2</sub> 2	S <sub>2</sub> 3	
E1	0	1	0	0	1	0	0	0		1	1	1	1	1	0	0	0	0	7
E2	0	0	0	0	0	0	0	0		1	1	1	1	1	1	0	0	0	6
E3	0	0	0	0	0	0	0	0		1	1	0	0	1	0	0	0	0	3

E4	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	5
E5	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	3
E6	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	3
E7	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	9
E8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	3
E9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	4
E10	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	3
E11	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	3
E12	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	8
E13	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	3
E14	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	8
E15	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	3
E16	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	6
E17	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	4
E18	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	3
E19	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	4
E20	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	8
E21	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
E22	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	6
E23	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	3
E24	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	6
E25	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	3
E26	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	3
E27	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	3
E28	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	5
E29	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	5
E30	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	3



E31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	3
E32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	6
E33	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	7
E34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	3
Total	0	9	0	0	9	2	0	1	34	33	10	10	33	8	4	0	0		

**Tabla 20. Resultados actividad 3 por estudiante**

	ACTIVIDAD 3																				Total
Estudiante	REGL A 1		REGL A 2		REGL A 3		REGLA 4			REGL A 5		REGL A 6		REGLA 7			REGLA 8				
	C1	C2	C1	C2	C1	C2	C1		C2	C1	C2	C1	C2	C1			C1			C2	
	S <sub>11</sub>	S <sub>21</sub>	S <sub>11</sub>	S <sub>21</sub>	S <sub>11</sub>	S <sub>21</sub>	S <sub>11</sub>	S <sub>12</sub>	S <sub>21</sub>	S <sub>14</sub>	S <sub>21</sub>	S <sub>14</sub>	S <sub>21</sub>	S <sub>11</sub>	S <sub>12</sub>	S <sub>14</sub>	S <sub>11</sub>	S <sub>12</sub>	S <sub>14</sub>	S <sub>21</sub>	
E1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2
E2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	3
E3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	4
E4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	5
E5	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	8
E6	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	6
E7	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	5
E8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	5
E9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	6
E10	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	5
E11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	3
E12	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	7

E13	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	3
E14	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	10
E15	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	9
E16	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	7
E17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
E18	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	15
E19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	4
E20	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	4
E21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	2
E22	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	4
E23	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	5
E24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	10
E25	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3
E26	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	5
E27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	4
E28	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	13
E29	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	5
E30	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	5
E31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	6
E32	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	10
E33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
E34	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	4
Total	<b>0</b>	<b>9</b>	<b>0</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	<b>0</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>1</b>	<b>8</b>	<b>0</b>	<b>8</b>	<b>21</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	
									<b>9</b>					<b>3</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	

Las actividades 1, 2 y 3 permiten establecer si los estudiantes dividen y conservan la unidad y la importancia que asignan al cero en la regla; con el fin de determinar en las actividades 5, 6, 7 y 8 si utilizan las ideas de conteo (asignar el uno a la primera línea) o por el contrario suman unidades iteradas (colocar el cero al principio o dejar el espacio). Teniendo en cuenta las categorías, se puede inferir que C1 (División y Conservación de la unidad) y C2 (Ausencia del cero) no son causales entre sí, es decir, un estudiante que omite el cero al principio no necesariamente tiene en mente la unidad y la conserva, además cuando la actividad se hace más compleja (actividad 2, no colocar las líneas en la regla), se permite establecer que en los estudiantes impera la idea de la secuencia numérica en la regla y en la mayoría de las veces no dan importancia a los espacios entre marcas (unidad de medida); de ello podemos concluir que la mayoría de los estudiantes comprenden que las unidades deben ser adyacentes en la regla pero puede cambiar el tamaño de la unidad (espacio entre marcas).

**Tabla 21. Resultados actividad 4,5 y 6 por estudiante**

	ACTIVIDAD 4				ACTIVIDAD 5									ACTIVIDAD 6								
					SITUACIÓN 1						SITUACIÓN 2			REGLA 1 Y 2								
Estudiante	C1		C4		C3		C4			C3		C4			C1			C3	C4			Total
	S13	S14	S41	S43	S31	S33	S41	S42	S44	S31	S33	S41	S42	S44	S11	S12	S16	S33	S41	S42	S44	
E1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	7
E2	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	5

E3	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	6
E4	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	8
E5	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	7
E6	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	5
E7	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
E8	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	4
E9	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	5
E10	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	6
E11	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
E12	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	5
E13	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
E14	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
E15	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	5
E16	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	6
E17	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	6
E18	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	6
E19	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
E20	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	6
E21	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
E22	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	7
E23	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	6
E24	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
E25	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
E26	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	6
E27	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	5
E28	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	7
E29	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	5



E1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	7	
E2	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	7
E3	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1 0
E4	0	1	0	0	1	0	0	1		1	0	0	0	0	0	0	0		1	1	0	0	0	0	0		0	1	
E5	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1 0
E6	0	1	0	1	0	0	1	0		1	0	0	0	0	0	0	1		0	1	0	0	0	1	0		0	0	
E7	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	7
E8	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	8
E9	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	5
E10	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	7
E11	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	5
E12	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1 0
E13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	
E14	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	8
E15	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	9
E16	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	4
E17	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
E18	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
E19	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
E20	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	3
E21	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
E22	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1 0
E23	0	1	0	0	1	0	0	1		1	0	0	0	0	0	0	0		1	1	0	0	0	0	0		0	0	

E24	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	3		
E25	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	6	
E26	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	10	
E27	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	6	
E28	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	7
E29	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	5	
E30	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	
E31	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	
E32	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	6
E33	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	
E34	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	6
TOTAL	0	2	1	1	1	2	1	2	0	0	4	0	1	1	1	1	2	0	0	3	1	1	0	1	1	18	1			
L		1	5	1	8		1	7	9								8	2							5	6				

En las actividades 5, 6, 7 y 8 los estudiantes usan la regla como objeto intercurrente, aunque al medir, la mayoría no atienden el hecho de que la regla no siempre comienza en cero y por esta razón no usan estrategias donde le resten el faltante de la regla, lo importante para ellos es que la regla cumpla con una secuencia numérica sin necesidad de que empiece desde el cero (conclusión actividades 1, 2 y 3); otros restan al valor dado el faltante en la regla; pero no relacionan este número con la cantidad de iteraciones de la unidad, en otras palabras, dan importancia a la cantidad, pero no establecen la relación con la unidad de medida (actividad 4).

Al medir curvas algunos suponen que no se pueden medir; otros linealizan la curva o miden la distancia entre el punto inicial y el punto final de la misma, en otras

palabras, asocian la longitud con segmentos de recta; pero al cambiar la condición de regla rígida a flexible se cambia esta idea en los estudiantes, además cuando miden líneas circulares confunden su longitud con el diámetro de esta.

Cuando el instrumento de medida es más pequeño que el objeto a medir, los estudiantes suman los espacios faltantes, pero se equivocan sumando; y cuando el instrumento de medida es más grande que el objeto a medir, restan espacios sobrantes a las medidas con facilidad si la regla está en perfectas condiciones, es decir, que comience en cero.

### 3.9. CARACTERIZACIÓN DE LOS ERRORES SISTEMÁTICOS EN QUE INCURREN LOS ESTUDIANTES OBJETO ESTUDIO DE CASO

La tabla 23, muestra la relación existente entre los errores en que incurren los estudiantes durante las actividades 5, 6, 7 y 8 bajo las tres condiciones de regla, para este caso se escogieron los estudiantes que no respondieron apropiadamente en las categorías de análisis, un total de 15 estudiantes. Cabe destacar que la mayoría de los errores son diferentes a los que se describieron en los antecedentes de este trabajo, por las condiciones en que se desarrolló, y a la luz de las categorías de análisis y sus respectivos indicadores que describimos a continuación.

Las codificaciones utilizadas en la tabla son:



ER 1. Error 1: Alineamiento del extremo del segmento que se ha de medir con el extremo de la regla y no con el cero de esta.

ER 2. Error 2: Al medir un segmento, contar el número de marcas correspondientes como cantidad de unidades del segmento a medir.

ER 3. Error 3: Al medir, a partir de un determinado punto (valor de la escala) de la regla la longitud de un segmento, no restarle al extremo el punto origen.

ER 4. Error 4: Relación entre número unidad y cantidad de medida.

ER 5. Error 5: Al medir, establecer la marca inicial y final en la regla para determinar la longitud.

ER 6. Error 6: Creer que es imposible medir una línea curva

ER 7. Error 7: Confundir distancia y longitud.

No olvidar que cero (0) indica que no incurre en el error y uno (1) que incurre en él.

**Tabla 23. Errores por estudiante**

Estudiante	ER1	ER2	ER3	ER4	ER5	ER6	ER7	Total
E1	1	1	1	0	1	0	1	5
E2	0	1	1	0	0	0	1	3
E3	1	1	1	1	0	0	1	5
E4	0	1	1	1	1	0	1	5
E5	0	0	1	1	1	0	1	4

E6	0	1	1	1	1	1	1	6
E8	1	1	0	1	0	0	1	4
E10	1	1	1	1	0	0	1	5
E12	1	1	1	0	0	0	1	4
E15	1	1	1	1	0	0	1	5
E22	1	1	1	1	0	0	1	5
E23	1	1	1	1	0	0	1	5
E26	1	1	1	1	0	0	1	5
E27	1	1	0	0	0	0	1	3
E28	0	1	1	1	1	0	1	5
Total	10	14	13	11	5	1	15	

Los errores encontrados son los siguientes:

ER1. Alineamiento del extremo del segmento que se ha de medir con el extremo de la regla y no con el cero de esta. Cuando el cero no está en el extremo, de igual forma, cuando no se pone ningún número en la regla, puede inducir a errores en las medidas. En la categoría C2 se puede apreciar que los estudiantes no dan importancia al cero, ellos pueden omitir el cero y empezar a contar desde el número donde comienza la regla, para ellos es relevante la secuencia numérica. La actividad 6 de medición se tuvo en cuenta principalmente para identificar los estudiantes que cometen este error, de igual forma las actividades 1, 2 y 3 nos permiten establecer cómo los estudiantes conciben la regla.

ER2. Al medir un segmento, contar el número de marcas correspondientes como cantidad de unidades del segmento a medir como se establece en la categoría C4.

El resultado es una unidad mayor que la medida real. Se puede observar que los estudiantes en la categoría C1, no reconocen la unidad, al dibujar el instrumento (regla) solo dan importancia a las marcas en ella y a la secuencia numérica, para algunos la primera marca corresponde al número 1.

ER3. Al medir, a partir de un determinado punto (valor de la escala) de la regla la longitud de un segmento, no restarle al extremo el punto origen. Los estudiantes se enfocan en las marcas (C4) o en el número que está en la regla, la no comprensión de la unidad (C1) y de la longitud como una agregación de espacios unitarios o segmentos además de suponer la continuidad del objeto a medir, es decir una relación explícita entre medición y continuidad, que provoca en los niños la presencia de este error.

El ER2 y ER3 se basan de los resultados de las actividades 5, 6 y 7 donde se puede visualizar con mayor claridad cómo se persiste en el error, frente a como conciben la regla, categorías C1 y C4.

ER4. Relación entre número unidad y cantidad de medida. Al medir a partir de un determinado punto (valor de la escala) de la regla, la longitud de un segmento, sumarle a la medida el valor faltante. Los estudiantes usan a menudo un número para designar la cantidad de medida, pero no lo relacionan con el número de iteraciones de la unidad (C4). Para el análisis de este error se implementó la actividad 8.

ER5. Al medir, colocar la marca inicial y final en la regla para establecer la longitud. Los estudiantes dan una medida de la longitud mediante un intervalo, es decir, dan como medida el centímetro en que inicia y en que finaliza el objeto que se mide (C4). Este tipo de error se presentó en los resultados de las actividades 5, 6 y 7.

ER6. Creer que es imposible medir una línea curva. Ello supone que no es común que para medir líneas curvas se necesita algún tipo de elemento (como una cuerda) que la recubra y permita rectificarla para, posteriormente, trasladar su longitud sobre una regla, a cambio de superponer ésta sobre la línea curva para rectificar y medir la distancia entre los extremos. Para este error se implementó la actividad 7, que es la única actividad que solicita medir líneas curvas. Este tipo de error es persistente cuando se tienen instrumentos rígidos para medir.

ER7. Confundir distancia y longitud, al medir el diámetro en lugar de la longitud de una línea circular. En este caso al establecer la medida, los estudiantes incurren en medir diámetros de la línea circular y por tanto no miden su longitud (C5). De otra parte, cuando miden líneas curvas toman el punto inicial y final, trazan segmentos los cuales miden. Algunos estudiantes creen que solo los segmentos tienen longitud y las curvas se linealizan tomando la distancia entre el punto inicial y el punto final; se puede inferir que este tipo de error es influenciado por el tipo de instrumento que se proporciona al estudiante, el tiempo que se use el instrumento, además del tipo de tareas que se proporcionan; “el uso de instrumentos rígidos puede llegar a hacer pensar a los estudiantes que una curva no tiene longitud”. Específicamente la actividad 7 proporcionó los resultados para establecer este tipo de error.

#### **4. CONCLUSIONES**

Se presentan las conclusiones en cinco aspectos importantes, intentando recoger los resultados de la fase que sustentan la metodología de la investigación y que aportan para continuar posibles estudios referentes a los errores y la medida en general.

De igual forma, es posible realizar una lectura global que permite relacionar y observar los resultados del proceso investigativo. A continuación, se presentan estas conclusiones:

Respecto al objetivo general podemos concluir: Al estudiar los errores, nos hemos encontrado en un campo muy amplio y complejo, debido a que estos son la manifestación de un proceso en el que interactúan muchas variables: docente, estudiante, contexto, entre otras; por ello tuvimos que centrarnos en detectarlos, clasificarlos y aún más realizar un diagnóstico de estos errores en los estudiantes cuando usan la regla para medir.

Las actividades realizadas 1 a 4 estuvieron enfocadas hacia el diagnóstico de los errores encontrados en la actividad 5, 6, 7 y 8, observando lo siguiente:

1. Los errores son persistentes (como es el caso de E6), particulares y difíciles de superar en algunos casos, debido a que los estudiantes tienen ciertos conocimientos arraigados (conservación de la unidad y conteo de líneas).

2. Los estudiantes consideran que la regla es un instrumento para trazar líneas, pero al enfrentarse a actividades de medida, son capaces de usarlo sin tener en cuenta los criterios de validez y confiabilidad en el instrumento.

3. Algunos errores no se deben al proceso de medida sino al instrumento proporcionado, como es el caso de la regla rígida, estos errores se presentan en mayor proporción cuando se propone medir la longitud de líneas curvas; en los estudiantes se presenta una tendencia muy marcada al pensar que una línea curva no se puede medir o medir la distancia entre el punto inicial y el punto final. De lo anterior se observó que en general, cuando se cambia la regla rígida por una regla maleable hay una disminución del error, sin embargo, la asignación del número en la regla se mantiene.

4. Otros errores se deben a la forma cómo los estudiantes conciben la unidad, por ejemplo, confundir las marcas con los espacios entre ellas, de igual forma al no tener claridad de la relación entre unidades de medida.

5. Los estudiantes asocian la medición con el conteo, y por ende ven la medida como un proceso de asignación de números de la regla, en palabras de Chamorro (1995) “aritmétizar la medida”. El conteo se enfatiza sobre el número de veces en que se itera la unidad y se deja de lado las verdaderas condiciones que posibilitan que, una vez obtenida la medida como número, se deje de utilizar el objeto de medición.

6. La poca importancia que asignan los estudiantes al cero puede ocasionar errores a la hora de medir.

7. Las actividades con regla rota (A5, A6 y A7), son las que más errores presentan, en estos casos el conteo de líneas y el no restar la parte faltante de la regla a la medida final, generan malas mediciones.

8. En la actividad 8 adicionalmente a las categorías de análisis encontramos, dificultades o errores aritméticos a la hora de sumar la iteración de las unidades. Es decir, al sumar o restar espacios faltantes no realizan de manera correcta la suma o resta.

Respecto a los resultados de otras investigaciones, se muestra que la mayoría de errores sistemáticos en que incurren los estudiantes de grado quinto de la institución educativa Alberto Lleras Camargo coinciden en los identificados por Zorrilla, et al.<sup>58</sup> donde su frecuencia y origen difieren según la actividad propuesta; la caracterización hecha, permite entender la actividad de medida como una actividad compleja en la que además de identificar el tipo de errores, es necesario reconocer su causa; otras investigaciones que dan cuenta de los errores que cometen los estudiantes son las desarrolladas por Chamorro<sup>59</sup>, donde da gran importancia al cero como punto de origen de la graduación del instrumento de medida y para lo

---

<sup>58</sup> ZORRILLA, Antonio Frías; CUADRA, Francisco Gil; CARRETERO, María Francisca Moreno. Introducción a las magnitudes y la medida: longitud, masa, amplitud, tiempo. En *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria*. Síntesis, 2001. p. 477-502.

<sup>59</sup> CHAMORRO PLAZA, María del Carmen. Aproximación a la medida de magnitudes en la Enseñanza Primaria. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 1995, vol. 2, no 3, p. 31-53.

cual hacer corresponder éste con el objeto a medir y leer la graduación son tareas no señaladas explícitamente y se dejan a responsabilidad del estudiante; también, encontramos que la enseñanza de la regla como instrumento de medida es un tema que no se expone en la enseñanza elemental puesto que es algo tan “sencillo” para el docente que no tiene importancia su explicación. Adicionalmente para Drake Michael<sup>60</sup> usar una regla no es fácil, la regla es una clase de instrumento que viene en una variedad de formas. Por lo tanto, para usar cualquier regla en particular, los estudiantes necesitan entender la variabilidad entre las reglas y ser capaces de ajustarse a ella.

La condición o cambios en el instrumento como son: regla normal y regla rota, muestran que los estudiantes no establecen una relación entre unidad, cantidad y número<sup>61</sup>.

Es importante entender los conceptos de división, iteración de la unidad, transitividad, conservación, acumulación de distancia y la relación que existe entre número y la medición; para poder utilizarlos en la comprensión de la forma de pensar del estudiante con respecto al espacio mientras se participa en la actividad física de medir<sup>62</sup>.

---

<sup>60</sup> DRAKE, Michael, et al. learning to measure length: The problem with the school ruler. *Australian primary mathematics classroom*, 2014, vol. 19, no 3, p. 27

<sup>61</sup> BRYANT, P.E. y. NUNES, T. Children's Inferences and Measurement, British Psychological Society, Portsmouth, September, de 1994

<sup>62</sup> STEPHAN, Michelle; CLEMENTS, Douglas H. Linear and area measurement in prekindergarten to grade 2. *Learning and teaching measurement*, 2003, p. 3-16.



Los estudiantes no dan cuenta de la importancia de las unidades y desigualdad para medir, puesto que no las consideran características importantes de la regla y sus respuestas muestran que no coordinar números y unidades en una regla<sup>63</sup>.

Los estudiantes tienen en cuenta características particulares de la regla y no la analizan en su totalidad, inadecuada comprensión de la relación entre el tamaño, la aditividad, la iteración y la estructura de una regla<sup>64</sup>.

Incorporar una regla rota a situaciones de medida, revela con más claridad los errores en los estudiantes a la hora de medir, es decir los niños pueden usar representaciones numéricas proporcionadas por la regla (colocar el número en que coincide la regla y el segmento a medir), aun cuando ellos deben llevar a cabo procedimientos compensatorios (restar o sumar números faltantes) para superar el error sistemático introducido por la regla rota<sup>65</sup>.

Respecto a las actividades desarrolladas, permitieron analizar y confirmar los errores que cometen los estudiantes cuando se enfrentan a tareas de medida bajo tres preguntas: ¿cómo entienden los niños la regla?, ¿cómo usan la regla? y ¿cómo miden? Estas tres situaciones nos permitieron identificar y caracterizar los errores

---

<sup>63</sup> BRYANT, P.E. y. NUNES, T. Children's Inferences and Measurement, British Psychological Society, Portsmouth, September, de 1994

<sup>64</sup> SISMAN, Gulcin Tan; AKSU, Meral. A study on sixth grade students' misconceptions and errors in spatial measurement: Length, area, and volume. International Journal of Science and Mathematics Education, 2016, vol. 14, no 7, p. 1293-1319.

<sup>65</sup> NUNES, Terezinha; LIGHT, Paul; MASON, John. Tools for thought: The measurement of length and area. Learning and instruction, 1993, vol. 3, no 1, p. 39-54.

sistemáticos en que incurren los estudiantes y las ideas que tienen acerca de la medida de la longitud.

El uso sistemático de la regla regular (instrumento rígido) hace que los estudiantes cometan errores sobre todo al medir curvas; puesto que piensan que sólo se pueden medir segmentos de recta y las curvas son imposibles de medir; en algunos casos miden la distancia entre puntos extremos o linealizan la curva.

La regla convencional hace que los estudiantes conciban la idea que el número en el cual coincide el segmento con el instrumento es la medida correcta, sin tener en cuenta que al incorporar un instrumento poco usual como la regla rota, la estrategia usada en el caso anterior ya no es válida y la asignación del número a la medida no corresponde; estos conflictos se ven asociados a la definición de la unidad, la colocación del cero, y la asignación del número a la longitud de un segmento.

## 5. RECOMENDACIONES

Algunas recomendaciones frente a las actividades de medida o al uso de las actividades aquí presentadas son las siguientes:

- En la actividad 7, utilizar una sola línea recta y adicionar una línea en forma de cuadrado y/o en zigzag.
- En la actividad 3, agregar una regla rota con la secuencia numérica acorde, otra regla que empiece en cero y que las unidades se conserven donde la numeración corresponda a múltiplos de algunos números.
- En la actividad 4, adicionar una línea de igual tamaño con las marcas separadas a dos centímetros.

Este trabajo, hizo evidente que el uso de instrumentos rígidos como la regla normal en la enseñanza, provoca en los niños la idea de que sólo se pueden medir segmentos y que el cambio entre las condiciones de la regla como regla rota no son experiencias por las cuales hayan pasado los estudiantes; es por esto que el aumento de experiencias variadas y significativas como es la de medir con regla flexible, permite el desarrollo de la medida de líneas curvas.

Cabe destacar que si el docente genera actividades a partir de acciones didácticas que hagan énfasis en: ¿cómo los niños miden?, ¿Cómo usan la regla?, y ¿cómo conciben la regla? pueden mejorar la práctica de la medición en los niños; en

términos de Davydov<sup>66</sup>, lograrían establecer las múltiples correspondencias entre las unidades, los números y la cantidad de medida. Esto es, una instrucción es más eficaz cuando se enfoca en los estudiantes y que están pensando, y no en los procesos que involucran la actividad de medir longitudes, de ahí, que los estudiantes no siempre entienden unidades e iteración de la manera en que sus maestros lo esperan. Su conteo puede unirse a las marcas en lugar de las unidades, y su concepto del cero en la medida puede ser problemático. Reconociendo que los estudiantes traen este tipo de pensamiento, la ayuda del maestro y el tipo de actividades de medición van a ser de gran ayuda en el proceso de aprendizaje.

Con base a lo anterior, los resultados de este trabajo ponen en juego la falta de conocimiento, como consecuencia de un saber no enseñado por parte de los docentes y la dificultad a consecuencia del instrumento usado.

En resumen para una comprensión completa de la medición de longitudes es necesario tener en cuenta estos seis conceptos a la hora de enseñar la medición: división, unidades de iteración, transitividad, conservación, acumulación de distancia, y relación al número; aunque investigadores debaten el orden del desarrollo de estos conceptos y las edades a las que se desarrollan, coincidimos en que estas ideas son fundamentales para la medición y que deben ser consideradas durante cualquier instrucción de medición.

---

<sup>66</sup> DAVYDOV, V. V. The psychological characteristics of the formation of elementary mathematical operations in children. *Addition and subtraction: A cognitive perspective*, 1982, p. 224-238

De acuerdo con el desarrollo del proyecto y los resultados obtenidos, toda actividad de medición debe plantear aspectos como:

- Indagar acerca de la direccionalidad didáctica para el aprendizaje de la medida y del proceso de formalización de la medida, es decir validar el significado de medida y su uso en el contexto escolar.
- Planteamiento de variados y múltiples problemas, que incluyan el uso de recursos, procedimientos y estrategias de medida. A partir de relaciones perceptivas con actividades de re-visualización inactiva, icónica y verbal; además de hacer conscientes los procedimientos, recursos y estrategias que cada estudiante utiliza cuando mide.
- Trabajar la comparación de relaciones de equivalencia métrica entre diferentes unidades y sistemas.
- Ampliar la relación del uso de las unidades de medida (centímetros, metros, milímetros), con las unidades antropométricas, objétales y magnitudinales.
- Valorar el proceso de estimación en la medida.
- Analizar variables que intervienen en los errores (la edad del alumno o madurez, nivel educativo, medio social, etc.) y por supuesto su tratamiento en el aula.

### **Preguntas para futuros estudios**

¿Cuáles son los procesos y procedimientos matemáticos que estructuran la adquisición de la medida de longitud en los niños?

¿Cuál es el papel de las unidades de medida antropométricas en la evolución del concepto de medida de longitud y su lugar en la enseñanza de la matemática?

¿Qué relación existe entre el tamaño, número, cantidad, el concepto de medida de longitud y la adquisición numérica?

¿Qué tratamiento se puede dar en la escuela primaria que minimice los errores en el uso de la regla?

## BIBLIOGRAFÍA

ALAGIA, HUMBERTO. Problemas en Educación Matemática. *Noticiero de la Unión Matemática*, 2002.

ARTIGUE, Michèle, et al. La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. *Ingeniería didáctica en educación matemática*, 1995, vol. 1, p. 97-140.

ASTOLFI, Jean Pierre. El error, un medio para enseñar. 1999.

BARRETT, Jeffrey E., et al. Understanding children's developing strategies and concepts for length. *Learning and teaching measurement*, 2003, p. 17-30.

BRYANT, P. E.; KOPYTYNSKA, H. Spontaneous measurement by young children. *Nature*, 1976, vol. 260, no 5554, p. 773.

BRYANT, P.E. y. NUNES, T. Children's Inferences and Measurement, British Psychological Society, Portsmouth, September, de 1994

BROUSSEAU, Guy; BALACHEFF, Nicolas. *Théorie des situations didactiques: Didactique des mathématiques*. Grenoble: La pensée sauvage, 1998.

BROUSSEAU, Guy. Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1999, vol. 4, no 2, p. 165-198.

CHAMORRO PLAZA, María del Carmen. Aproximación a la medida de magnitudes en la Enseñanza Primaria. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 1995, vol. 2, no 3, p. 31-53.

CHAMORRO, Carmen; BELMONTE, Juan M. *El problema de la medida: Didáctica de las magnitudes lineales*. 1991

CHAVES, Viviana Elizabeth Jiménez; WEILER, Cornelio Comet. Los estudios de casos como enfoque metodológico. *Academo*, 2016, vol. 3, no 2, p. 5.

CHRISTIE, Gary. Helping Children Understand Measurement Using a Ruler. Ohio Journal of School Mathematics | Number 65 Spring, 2012.

CLEMENTS, Douglas H. Teaching length measurement: Research challenges. *School Science and Mathematics*, 1999, vol. 99, no 1, p. 5-11.

CLEMENTS, Douglas H.; SARAMA, Julie; BATTISTA, Michael T. Development of concepts of geometric figures in a specially designed Logo computer environment. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 1998, vol. 20, p. 47-64.

DAVYDOV, V. V. The psychological characteristics of the formation of elementary mathematical operations in children. *Addition and subtraction: A cognitive perspective*, 1982, p. 224-238.



DE ALMEIDA, António Fragoso. El estudio de casos en la investigación de educación de personas adultas. En *Investigación y práctica en la educación de personas adultas*. Nau Llibres, 2004. p. 41-60.

DEITZ, Kevin, et al. Children's understanding of ruler measurement and units of measure: A training study. En *Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society*. 2009, p. 2391- 2394.

DRAKE, Michael, et al. learning to measure length: The problem with the school ruler. *Australian primary mathematics classroom*, 2014, vol. 19, no 3, p. 27.

ENGLER, Adriana, et al. Los errores en el aprendizaje de matemática. *Revista Premisa*, 2004, vol. 6, no 23, p. 23-32.

FREUDENTHAL, H. Revisiting Mathematics Education: China Lectures. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer. 1991 citado por: NOVOA, Andrés Mauricio Martínez; CAICEDO, Juan Camilo Cobos; PUENTES, Elizabeth Torres. Matematización y modelización: experiencias y saberes. Una propuesta de aula. *Espiral, Revista de Docencia e Investigación*, 2015, vol. 5, no 2, p. 9-22.

GONZÁLEZ, María José; GÓMEZ, Pedro; RESTREPO, Ángela M. Usos del error en la enseñanza de las matemáticas. *Revista de Educación*, 2015, vol. 370, p. 71-95.

HIEBERT, J. "Why Do Some Children Have Trouble Learning Measurement Concepts?" *The Arithmetic Teacher*, vol. 31, no. 7, 1984, pp. 19–24. JSTOR,

JSTOR. [Consultado 31 de julio de 2018]. Disponible en Internet: [www.jstor.org/stable/41192320](http://www.jstor.org/stable/41192320)

INHELDER, Barbel; SINCLAIR, Hermine; BOVET, Magali. Apprentissage et structures de la connaissance. 1974.

JAIME, Luis Heliodoro. La evaluación en la educación superior. *Principia Iuris*, 2014, vol. 11, no 11.

KAMII, Constance; CLARK, Faye B. Measurement of length: The need for a better approach to teaching. *School Science and Mathematics*, 1997, vol. 97, no 3, p. 116-121.

LEHRER, Richard. Developing understanding of measurement. *A research companion to principles and standards for school mathematics*, 2003, p. 179-192.

LOVELL, Kenneth. Desarrollo de los conceptos básicos matemáticos y científicos en los niños. Ediciones Morata, 1986.

MACDONALD, A. Young children's representations of their developing measurement understandings. *Mathematics: Traditions and [new] practices*, 2011, vol. 1, p. 420-490.

MURCIA, M. E.; HENAO, J. C. Educación matemática en Colombia, una perspectiva evolucionaria. *Entre Ciencia e Ingeniería*, 2015, vol. 9, no 18, p. 23-30.

MURO, MN Pérez, et al. ¿Por qué nuestros alumnos cometen errores de cálculo? *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*, 1997, no 39, p. 193-204.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (ed.). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of, 2000.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (ed.). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of, 2000. Citado por: NATIONAL RESEARCH COUNCIL, et al. Fundamentos cognitivos para la iniciación en el aprendizaje de las matemáticas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 2014, vol. 3, no 1, p. 21-48.

NATIONAL RESEARCH COUNCIL, et al. Fundamentos cognitivos para la iniciación en el aprendizaje de las matemáticas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 2014, vol. 3, no 1, p. 21-48.

NUNES, Terezinha; LIGHT, Paul; MASON, John. Tools for thought: The measurement of length and area. *Learning and instruction*, 1993, vol. 3, no 1, p. 39-54.

PIAGET, Jean; INHELDER, Barbel y SZEMINSKA, Alina. *The Child's Conception of Geometry: Translated from the French by EA Lunzer*. Basic Books, 1960.

POCHULU, Marcel. Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad. *Colección Digital Eudoxus*, 2009, no 8.

RICO, Luis. Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. 1995.

SAPIRE, Ingrid, et al. engaging with learners' errors when teaching mathematics. *Pythagoras*, 2016, vol. 37, no 1, p. 1-11.

SARWADI, H. R. H.; SHAHRILL, Masitah. Understanding students' mathematical errors and misconceptions: The case of year 11 repeating students. *Mathematics Education Trends and Research*, 2014, vol. 2014, p. 1-10.

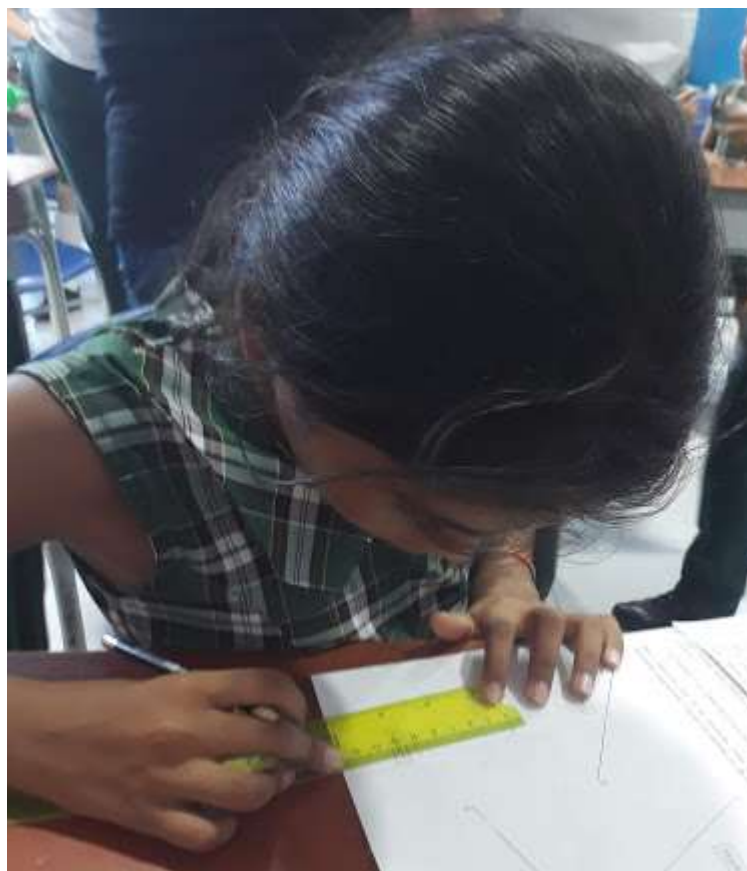
SISMAN, Gulcin Tan; AKSU, Meral. A study on sixth grade students' misconceptions and errors in spatial measurement: Length, area, and volume. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 2016, vol. 14, no 7, p. 1293-1319.

STEPHAN, Michelle; CLEMENTS, Douglas H. Linear and area measurement in prekindergarten to grade 2. *Learning and teaching measurement*, 2003, p. 3-16.

ZORRILLA, Antonio Frías; CUADRA, Francisco Gil; CARRETERO, María Francisca Moreno. Introducción a las magnitudes y la medida: longitud, masa, amplitud, tiempo. En *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria. Síntesis*, 2001. p. 477-502.

## ANEXOS

### Anexo A. TAREA FASE 1.



## Anexo B. ACTIVIDAD 1

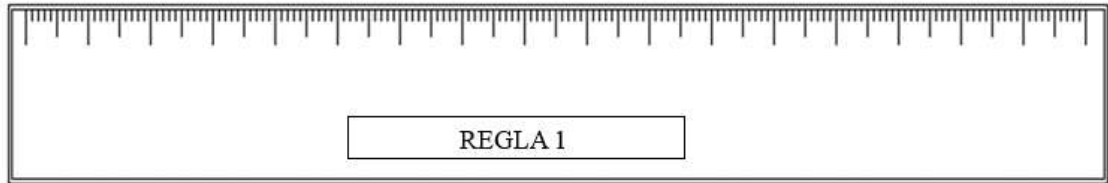
	UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA COLEGIO ALBERTO LLERAS CAMARGO Sede CATALUÑA	
---	--	---

**Grupo N°:** \_\_\_\_\_ **Fecha:** \_\_\_\_\_



**Objetivo General:** Analizar los errores de tipo sistemáticos que cometen los estudiantes de grado quinto de primaria de la Institución Educativa Colegio Alberto Lleras Camargo sede Cataluña cuando usan la regla como instrumento de medida de la longitud.

### ACTIVIDAD 1

El siguiente gráfico ilustra una regla. Coloca los números como deben encontrarse en ella.



## Anexo C. ACTIVIDAD 2

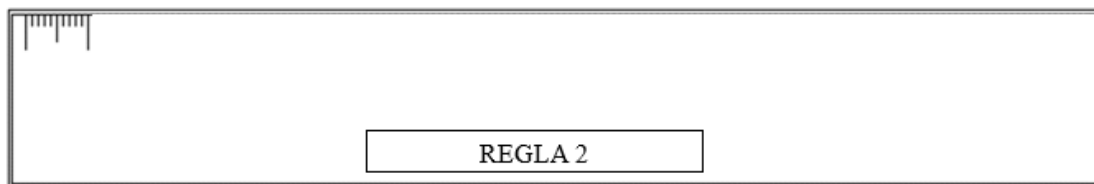
	UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA COLEGIO ALBERTO LLERAS CAMARGO Sede CATALUÑA	
---	--	---

**Grupo N°:** \_\_\_\_\_ **Fecha:** \_\_\_\_\_

**Objetivo General:** Analizar los errores de tipo sistemáticos que cometen los estudiantes de grado quinto de primaria de la Institución Educativa Colegio Alberto Lleras Camargo sede Cataluña cuando usan la regla como instrumento de medida de la longitud.

### ACTIVIDAD 2

El siguiente gráfico ilustra una regla, donde se indica la primera unidad dada en centímetros y milímetros. Completa la regla.



## Anexo D. ACTIVIDAD 3



UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA  
COLEGIO ALBERTO LLERAS CAMARGO  
Sede CATALUÑA

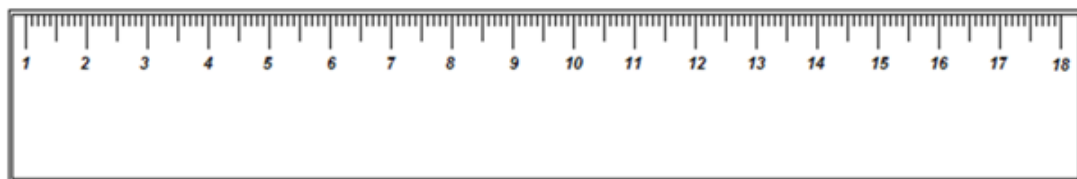


Estudiante: \_\_\_\_\_ Fecha: \_\_\_\_\_

**Objetivo General:** Analizar los errores de tipo sistemáticos que cometen los estudiantes de grado quinto de primaria de la Institución Educativa Colegio Alberto Lleras Camargo sede Cataluña cuando usan la regla como instrumento de medida de la longitud.

### ACTIVIDAD 3

El siguiente gráfico ilustra ocho reglas, determina cuales de ellas están dibujadas adecuadamente

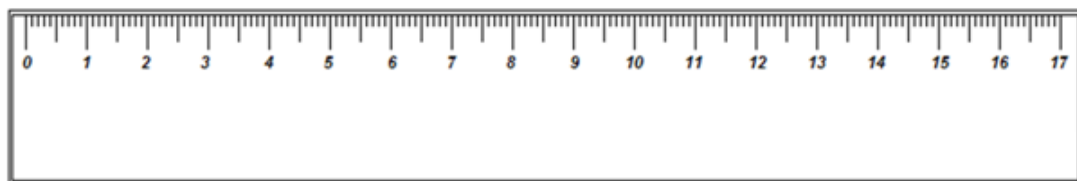


Justifique su respuesta

---

---

---

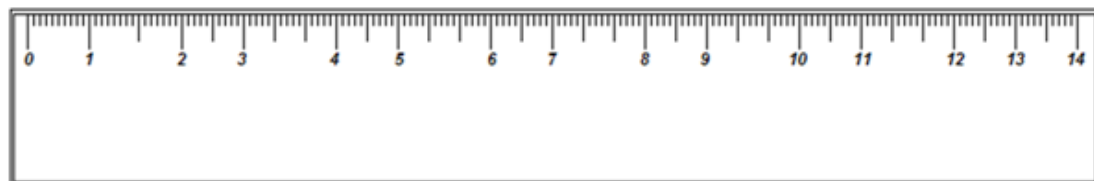


Justifique su respuesta

---

---

---



Justifique su respuesta

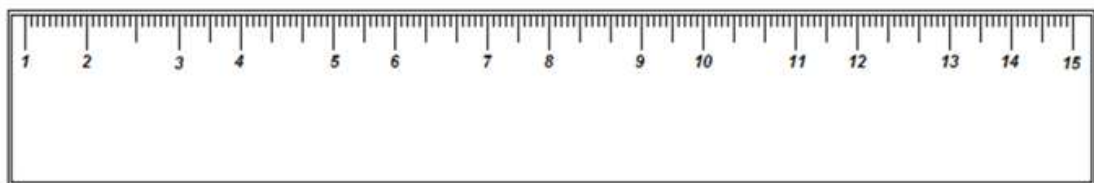
---



---



---



Justifique su respuesta

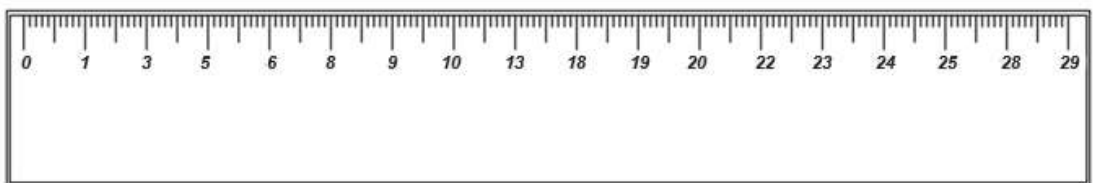
---



---



---



Justifique su respuesta

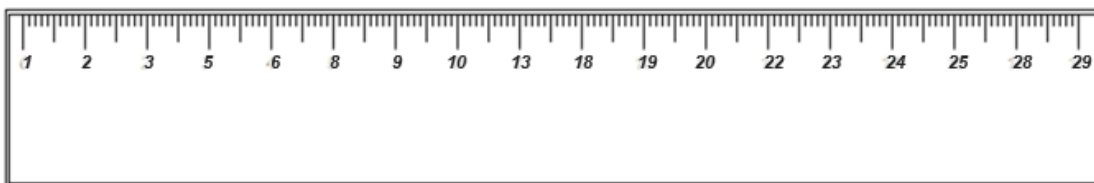
---



---



---



Justifique su respuesta

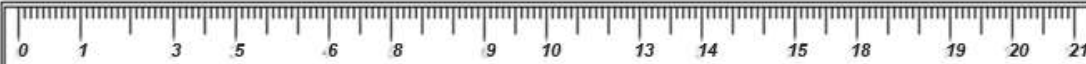
---



---



---



Justifique su respuesta

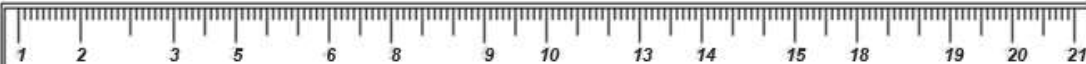
---



---



---



Justifique su respuesta

---





---



---

## Anexo E. ACTIVIDAD 4

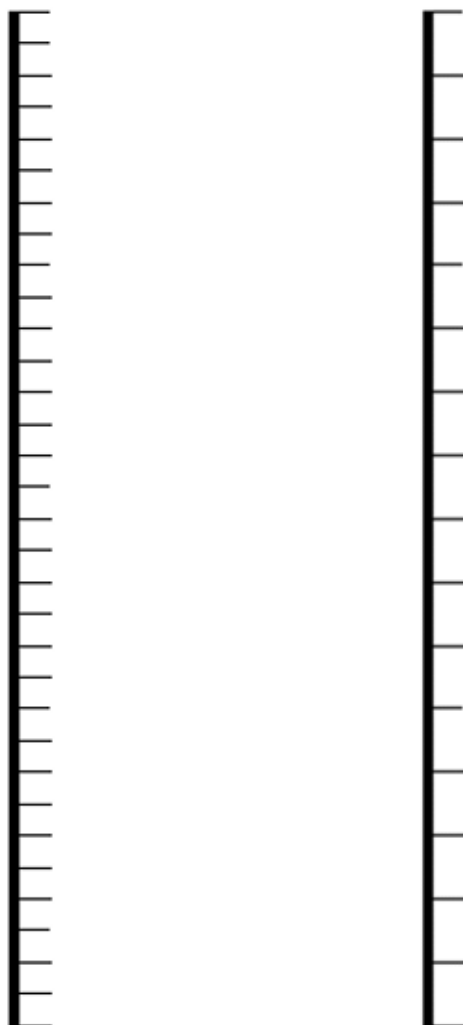
	UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA COLEGIO ALBERTO LLERAS CAMARGO Sede CATALUÑA	
---	--	---

**Estudiante:** \_\_\_\_\_ **Fecha:** \_\_\_\_\_



**Objetivo General:** Analizar los errores de tipo sistemáticos que cometen los estudiantes de grado quinto de primaria de la Institución Educativa Colegio Alberto Lleras Camargo sede Cataluña cuando usan la regla como instrumento de medida de la longitud.

### ACTIVIDAD 4

El siguiente dibujo ilustra dos líneas con marcas en centímetros y medios centímetros.  
¿Cuál de las dos líneas es más larga? Justifique su respuesta:



## Anexo F. ACTIVIDAD 5

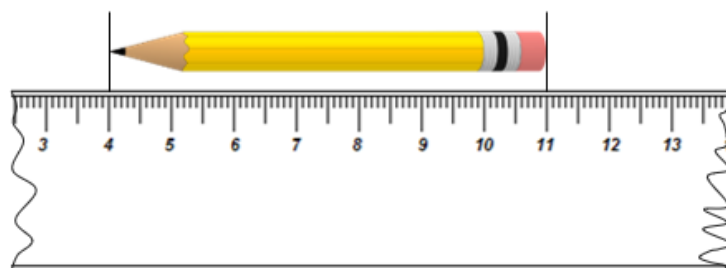
	<p>UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA COLEGIO ALBERTO LLERAS CAMARGO Sede CATALUÑA</p>	
---	--	---

Estudiante: \_\_\_\_\_ Fecha: \_\_\_\_\_

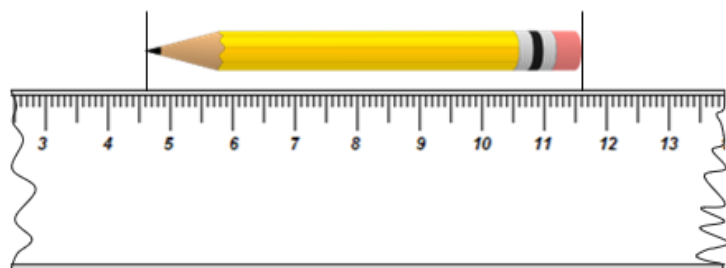
**Objetivo General:** Analizar los errores de tipo sistemáticos que cometen los estudiantes de grado quinto de primaria de la Institución Educativa Colegio Alberto Lleras Camargo sede Cataluña cuando usan la regla como instrumento de medida de la longitud.

### ACTIVIDAD 5

Estas reglas de centímetros están rotas. Están midiendo un lápiz. ¿Cuánto mide el lápiz?



\_\_\_\_\_



\_\_\_\_\_

¿Cómo lo resolviste?

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

## Anexo G. ACTIVIDAD 6



UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA  
COLEGIO ALBERTO LLERAS CAMARGO  
Sede CATALUÑA



**Estudiante:** \_\_\_\_\_ **Fecha:** \_\_\_\_\_

**Objetivo General:** Analizar los errores de tipo sistemáticos que cometen los estudiantes de grado quinto de primaria de la Institución Educativa Colegio Alberto Lleras Camargo sede Cataluña cuando usan la regla como instrumento de medida de la longitud.

ACTIVIDAD 6 (recortar las siguientes reglas y el borrador)

Estas reglas miden en centímetros pero no tiene números. ¿Cuánto mide el borrador?

Regla 1: \_\_\_\_\_

Regla 2: \_\_\_\_\_

¿Cómo lo resolviste?

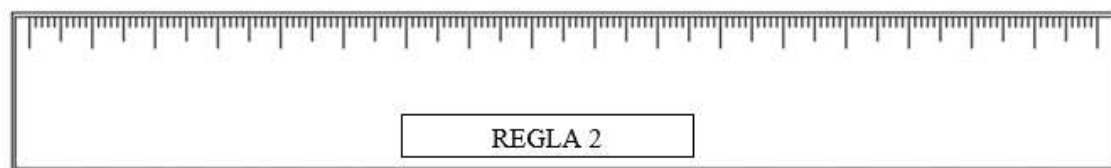
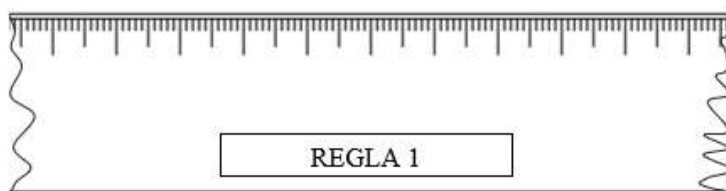
---

---

---

---

---



## Anexo H. ACTIVIDAD 7



UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA  
COLEGIO ALBERTO LLERAS CAMARGO  
Sede CATALUÑA



Estudiante: \_\_\_\_\_ Fecha: \_\_\_\_\_

**Objetivo General:** Analizar los errores de tipo sistemáticos que cometen los estudiantes de grado quinto de primaria de la Institución Educativa Colegio Alberto Lleras Camargo sede Cataluña cuando usan la regla como instrumento de medida de la longitud.

ACTIVIDAD 7: con diferentes situaciones de regla:

Mida y determine ¿cuál de las siguientes líneas es más larga con base en el instrumento proporcionado? Escriba las medidas con las diferentes reglas en la tabla 1.

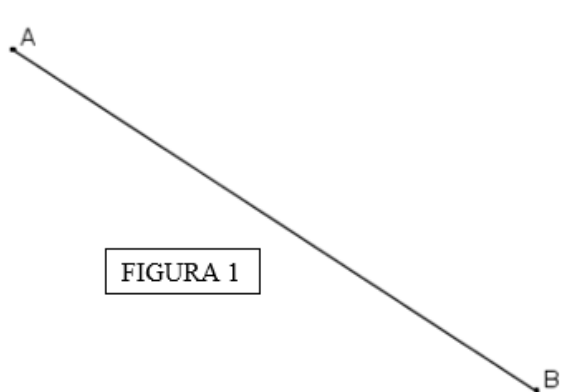


FIGURA 1

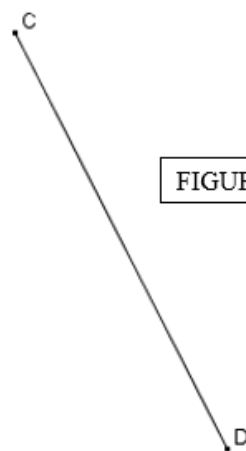


FIGURA 2

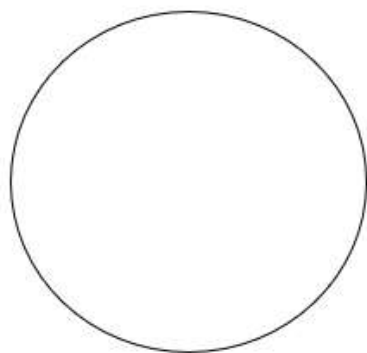


FIGURA 3

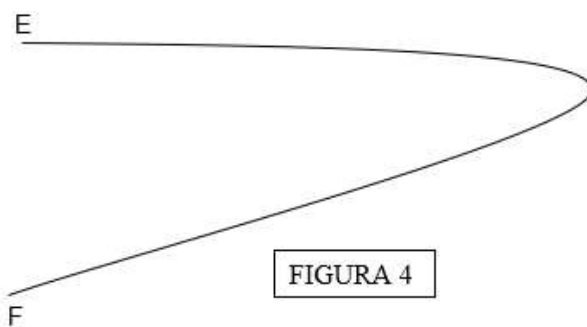


FIGURA 4

	FIGURA 1	FIGURA 2	FIGURA 3	FIGURA 4
REGLA ROTA				
REGLA RIGIDA				
REGLA FLEXIBLE				

Tabla 1. Medida de las figuras con las distintas reglas.

## Anexo I. ACTIVIDAD 8



UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA  
COLEGIO ALBERTO LLERAS CAMARGO  
Sede CATALUÑA



**Estudiante:** \_\_\_\_\_ **Fecha:** \_\_\_\_\_

**Objetivo General:** Analizar los errores de tipo sistemáticos que cometen los estudiantes de grado quinto de primaria de la Institución Educativa Colegio Alberto Lleras Camargo sede Cataluña cuando usan la regla como instrumento de medida de la longitud.

### ACTIVIDAD 8

Utiliza la regla de centímetros para medir los lápices. ¿Cuánto mide cada lápiz?



¿Cómo lo resolviste?

---

---

---



¿Cómo lo resolviste?

---

---

---



## RESUMEN ANALÍTICO ESPECIALIZADO (RAE)

<b>TIPO DE DOCUMENTO / OPCIÓN DE GRADO</b>	PROYECTO DE ESTUDIANTES COMO OPCIÓN DE GRADO PARA OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIADOS EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA.
<b>ACCESO AL DOCUMENTO</b>	UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS
<b>1. TÍTULO DEL DOCUMENTO</b>	ENTENDIENDO LA LONGITUD: ERRORES EN EL USO DE LA REGLA
<b>2. NOMBRES Y APELLIDOS DE LOS AUTORES</b>	CRISTIAN ANDREY OSPINA FRANCO ASTRID CAROLINA OVIEDO GUAVITA
<b>3. AÑO DE PUBLICACIÓN</b>	2019
<b>4. UNIDAD PATROCINANTE</b>	UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS, FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS, ESCUELA DE PEDAGOGIA, PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA.
<b>5. PALABRAS CLAVES</b>	MEDICIÓN, REGLA, MEDIDA, LONGITUD, ERRORES SISTEMÁTICOS.
<b>6. DESCRIPCIÓN</b>	Este trabajo se desarrolló con el fin de analizar los errores sistemáticos en el uso de la regla para la medición de la longitud en estudiantes de grado quinto en la ciudad de Villavicencio. El informe contiene los errores cometidos por los estudiantes al usar la regla para medir segmentos rectos y curvos, utilizando reglas en distintas condiciones: rígidas, rotas y flexibles. Confrontando los resultados con investigaciones y estableciendo los errores relevantes de los estudiantes al medir la longitud con una regla.
<b>7. CONTENIDO</b>	LA LONGITUD, LOS ERRORES
<b>8. METODOLOGÍA</b>	<p>La presente investigación se ubica en el paradigma de investigación cualitativa interpretativa, mediante un estudio de casos. Debido a que propende por la observación, interpretación y análisis de escenarios culturales naturales, para su comprensión y posterior transformación</p> <p>Este trabajo se basó en un estudio de caso de tipo único, descriptivo, teniendo en cuenta que se pretendió comprender un caso particular como son los errores sistemáticos en el uso de la regla al medir longitudes y sus posibles causas, utilizando fuentes de evidencias; para tal caso se recurrió a ocho actividades desarrolladas por estudiantes de grado quinto de la institución educativa</p>

	Alberto Lleras Camargo de la ciudad de Villavicencio durante el año 2018.
<b>9. FUENTES</b>	<p>ASTOLFI, Jean Pierre. El error, un medio para enseñar. 1999.</p> <p>BARRETT, Jeffrey E., et al. Understanding children's developing strategies and concepts for length. Learning and teaching measurement, 2003, p. 17-30.</p> <p>BRYANT, P.E. y. NUNES, T. Children's Inferences and Measurement, British Psychological Society, Portsmouth, septiembre, de 1994</p> <p>BROUSSEAU, Guy; BALACHEFF, Nicolas. Théorie des situations didactiques: Didactique des mathématiques. Grenoble: La pensée sauvage, 1998.</p> <p>CHAMORRO, Carmen; BELMONTE, Juan M. El problema de la medida: Didáctica de las magnitudes lineales. 1991</p> <p>CHAVES, Viviana Elizabeth Jiménez; WEILER, Cornelio Comet. Los estudios de casos como enfoque metodológico. Academo, 2016, vol. 3, no 2, p. 5.</p> <p>CLEMENTS, Douglas H. Teaching length measurement: Research challenges. School Science and Mathematics, 1999, vol. 99, no 1, p. 5-11.</p> <p>DAVYDOV, V. V. The psychological characteristics of the formation of elementary mathematical operations in children. Addition and subtraction: A cognitive perspective, 1982, p. 224-238.</p> <p>DE ALMEIDA, António Fragoso. El estudio de casos en la investigación de educación de personas adultas. En Investigación y práctica en la educación de personas adultas. Nau Llibres, 2004. p. 41-60.</p> <p>DEITZ, Kevin, et al. Children's understanding of ruler measurement and units of measure: A training study. En Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society. 2009, p. 2391- 2394.</p> <p>DRAKE, Michael, et al. learning to measure length: The problem with the school ruler. Australian primary mathematics classroom, 2014, vol. 19, no 3, p. 27.</p> <p>GONZÁLEZ, María José; GÓMEZ, Pedro; RESTREPO, Ángela M. Usos del error en la enseñanza de las matemáticas. Revista de Educación, 2015, vol. 370, p. 71-95.</p> <p>HIEBERT, J. "Why Do Some Children Have Trouble Learning Measurement Concepts?" The Arithmetic Teacher, vol. 31, no. 7, 1984, pp. 19–24. JSTOR, JSTOR. [Consultado 31 de julio de 2018]. Disponible en Internet: <a href="http://www.jstor.org/stable/41192320">www.jstor.org/stable/41192320</a></p> <p>MURCIA, M. E.; HENAO, J. C. Educación matemática en Colombia, una perspectiva evolucionaria. Entre Ciencia e Ingeniería, 2015, vol. 9, no 18, p. 23-30.</p> <p>NATIONAL RESEARCH COUNCIL, et al. Fundamentos cognitivos para la iniciación en el aprendizaje de las matemáticas. Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2014, vol. 3, no 1, p. 21-48.</p>

	<p>NUNES, Terezinha; LIGHT, Paul; MASON, John. Tools for thought: The measurement of length and area. Learning and instruction, 1993, vol. 3, no 1, p. 39-54.</p> <p>PIAGET, Jean; INHELDER, Barbel y SZEMINSKA, Alina. The Child's Conception of Geometry: Translated from the French by EA Lunzer. Basic Books, 1960.</p> <p>POCHULU, Marcel. Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad. Colección Digital Eudoxus, 2009, no 8.</p> <p>RICO, Luis. Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. 1995.</p> <p>SISMAN, Gulcin Tan; AKSU, Meral. A study on sixth grade students' misconceptions and errors in spatial measurement: Length, area, and volume. International Journal of Science and Mathematics Education, 2016, vol. 14, no 7, p. 1293-1319.</p> <p>ZORRILLA, Antonio Frías; CUADRA, Francisco Gil; CARRETERO, María Francisca Moreno. Introducción a las magnitudes y la medida: longitud, masa, amplitud, tiempo. En Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria. Síntesis, 2001. p. 477-502.-</p>
<b>10.CONCLUSIONES</b>	<p>1. Los errores son persistentes (como es el caso de E6), particulares y difíciles de superar en algunos casos, debido a que los estudiantes tienen ciertos conocimientos arraigados (conservación de la unidad y conteo de líneas).</p> <p>2. Los estudiantes consideran que la regla es un instrumento para trazar líneas, pero al enfrentarse a actividades de medida, son capaces de usarlo sin tener en cuenta los criterios de validez y confiabilidad en el instrumento.</p> <p>3. Algunos errores no se deben al proceso de medida sino al instrumento proporcionado, como es el caso de la regla rígida, estos errores se presentan en mayor proporción cuando se propone medir la longitud de líneas curvas; en los estudiantes se presenta una tendencia muy marcada al pensar que una línea curva no se puede medir o medir la distancia entre el punto inicial y el punto final. De lo anterior se observó que en general, cuando se cambia la regla rígida por una regla maleable hay una disminución del error, sin embargo, la asignación del número en la regla se mantiene.</p> <p>4. Otros errores se deben a la forma cómo los estudiantes conciben la unidad, por ejemplo, confundir las marcas con los espacios entre ellas, de igual forma al no tener claridad de la relación entre unidades de medida.</p> <p>5. Los estudiantes asocian la medición con el conteo, y por ende ven la medida como un proceso de asignación de</p>

	<p>números de la regla, en palabras de Chamorro (1995) “aritmétizar la medida”. El conteo se enfatiza sobre el número de veces en que se itera la unidad y se deja de lado las verdaderas condiciones que posibilitan que, una vez obtenida la medida como número, se deje de utilizar el objeto de medición.</p> <p>6. La poca importancia que asignan los estudiantes al cero puede ocasionar errores a la hora de medir.</p> <p>7. Las actividades con regla rota (A5, A6 y A7), son las que más errores presentan, en estos casos el conteo de líneas y el no restar la parte faltante de la regla a la medida final, generan malas mediciones.</p> <p>8. En la actividad 8 adicionalmente a las categorías de análisis encontramos, dificultades o errores aritméticos a la hora de sumar la iteración de las unidades. Es decir, al sumar o restar espacios faltantes no realizan de manera correcta la suma o resta.</p>
<b>11. FECHA DE ELABORACIÓN</b>	Mayo, 2019